MOSAICOS

Traducción de
M. G. BENÍTEZ TORIELLO

Gilles Dowek

LA LÓGICA

Una explicación para comprender
Un ensayo para reflexionar

siglo
veintiuno
editores

siglo veintiuno editores, s.a. de c.v.
CERRO DEL AGUA 248, DELEGACIÓN COYOACÁN, 04310, MÉXICO, D.F.

siglo xxi editores argentina, s.a.
LAVALLE 1634, 11 A, C1048AAN, BUENOS AIRES, ARGENTINA

portada y diseño de interiores: maría luisa martínez passarge
fotografías: p. 11, representación de la geometría en *margarita philosophica* (1503) de gregor reisch
p. 73, *Los mensuradores* (detalle), pintura flamenca de 1600

primera edición en español, 2001

ISBN 968-23-2334-7

primera edición en francés, 1995

título original: *la logique*

A la memoria de mi padre

PRÓLOGO

En el trayecto de un viaje, Guillermo de Baskerville se encuentra con un grupo de monjes que andan en busca de un caballo que se escapó de la abadía vecina. Al principio los monjes se sorprenden un poco cuando el viajero les da a conocer el lugar donde se encuentra el caballo fugitivo, pero se desconciertan del todo cuando los entera de que también sabe que el animal tiene el mejor galope de toda la cuadra, que su pelaje es negro, que tiene cinco pies de alzada, etcétera. Sin embargo, Guillermo jamás ha visto al animal, aunque sabe hacia dónde se dirige al observar las huellas de sus pezuñas en la nieve. La regularidad de esas huellas le permitió inferir, asimismo, que el caballo tiene un buen galope. Por lo que se refiere a su color, le bastó percatarse de las crines negras adheridas a las espinas de un zarzal.

El episodio anterior pertenece a la novela de Umberto Eco, *El nombre de la rosa*, si bien la literatura abunda en relatos similares. Desde los cuentos persas hasta las novelas de Edgar Allan Poe, la facultad de razonar forma parte de la imagen que el hombre se ha forjado de sí mismo: el hombre, animal dotado de razón, razona, y los razonadores excepcionales, sean hombres reales o personajes ficticios, como

Edipo, Arquímedes o Sherlock Holmes, despiertan la admiración. Ya los filósofos griegos se cuestionaron sobre la naturaleza del razonamiento*. Así debemos a Aristóteles uno de los primeros tratados de lógica.

El razonamiento es objeto de valoración en nuestro mundo razonable. Las ciencias, en particular, se sirven de él profusamente, y las matemáticas* lo reconocen como su único método. Sin embargo, para acceder a la verdad contamos con otros medios además del razonamiento deductivo. Ellos son, concretamente, la observación* y el cálculo*. Entonces, ¿cuándo resulta útil o necesario razonar? ¿Es el razonamiento realmente diferente del cálculo, o es sólo una reformulación velada de éste? ¿Ofrece el razonamiento la misma confiabilidad que el cálculo? Éstas son algunas de las preguntas que ocupan el centro de la interrogante lógica. Los logros célebres, a los que se vinculan los nombres de Alonzo Church, Alan Turing, Kurt Gödel, etc., responden a esas preguntas. A ellos dedicamos la primera parte del presente volumen.

La segunda parte se ocupa del lugar que tiene la lógica en el seno de nuestros conocimientos. ¿Compete a la lógica únicamente el discurso sobre el discurso?, o bien, ¿comprender la naturaleza del razonamiento ayuda a razonar?

---

* La primera vez que aparece un término importante de un vocabulario especializado, que se explica en el glosario, va seguido de un asterisco.

LAS REGLAS PARA RAZONAR

Una cosa no es necesariamente verdadera por el hecho de que un hombre muera por ella.

OSCAR WILDE

SIN LA FACULTAD de razonar, muy probablemente no podríamos comunicarnos ni actuar. ¿Cómo sabríamos dónde ir a comprar una tarta de manzana si no fuéramos capaces de hacer el siguiente razonamiento: "Las tartas de manzana son pastelillos; los pastelillos se venden en las pastelerías; por lo tanto, las tartas de manzana se venden en las pastelerías"?

Los razonamientos correctos

En cambio, es incorrecto el razonamiento: "Las tartas de manzana son una cosa deliciosa; en las neverías venden cosas deliciosas; por lo tanto, las tartas de manzana se venden en las neverías." Los filósofos griegos, a quienes sin duda les impresionó la similitud que existe entre los razonamientos correctos y los razonamientos incorrectos, emprendieron la búsqueda de criterios que permitieran distinguir a unos de los otros. Aristóteles (284-322 a.C.) y los estoicos, como Filón de Megara (siglo IV a.C.), propusieron reglas que permitirían construir sólo razonamientos correctos. Una de las reglas de Aristóteles se enuncia como sigue: "Si A es B, y B es C, entonces A es C." Si hacemos corresponder A, B y C con las expresiones *tartas de manzana*, *pastelillos* y *se venden en las pastelerías*, respectivamente, obtendremos el razonamiento que formulamos antes. Si, de manera similar, consideramos las expresiones *detectives*, *inteligentes* y *excéntricos*, obtendremos el siguiente razonamiento: "Los detectives son inteligentes; las personas inteligentes son excéntricas; por lo tanto, los detectives son excéntricos." Cualesquiera que sean las expresiones que se hagan corresponder con A, B y C, el resultado será siempre un razonamiento correcto, es decir, un razonamiento en el que la conclusión* es verdadera siempre que las premisas* también lo sean. Al considerar las expresiones *tartas de manzana*, *pastelillos* y *se venden en las neverías*, se obtiene el siguiente razonamiento: "Las tartas de manzana son pastelillos; los pastelillos se venden en las neverías; por lo tanto, las tartas de manzana se venden en las neverías", el cual es, de igual manera, un razonamiento correcto. Su conclusión es falsa, lo mismo que una de sus premisas.

Lo primero que cabe señalar es que la corrección de un razonamiento depende únicamente de su forma (por esto se afirma que la lógica es formal) y no del significado de las palabras que en él figuran. De manera que es posible verificar la validez de un razonamiento aun cuando no se comprenda el significado de sus palabras. Por ejemplo, el razonamiento: "Las tramoyas son máquinas; las máquinas se venden en las pastelerías; por lo tanto, las tramoyas se venden en las pastelerías", es correcto.

Cierta vaguedad

Sin embargo, el razonar correctamente no basta para evitar los errores. El razonamiento: "Marilyn Monroe es una estrella; las estrellas transforman el hidrógeno en helio; por lo tanto, Marilyn Monroe transforma el hidrógeno en helio", es correcto desde el punto de vista lógico. No obstante, la conclusión es falsa aun cuando las premisas son verdaderas. Es indudable que el error se debe a la confusión de los dos significados de la palabra *estrella*. En virtud de que se trata de dos conceptos, lo más conveniente sería utilizar dos palabras diferentes. En consecuencia, para razonar es necesario, ante todo, aislar los conceptos que utilizamos de la nebulosa de homónimos, metáforas, metonimias, símbolos, equívocos, connotaciones, etc., de que la lengua los rodea. Ello requiere utilizar un lenguaje como el que George Orwell imaginó en *1984*. Según ese lenguaje, la proposición: "Todos los hombres son iguales", es falsa en la medida en que significa que todos los hombres tienen igual altura, peso, fuerza, etcétera.

Debido a que presupone el previo aislamiento de los conceptos, la lógica no se aplica directamente a los razonamientos de la vida cotidiana. Así, de lo que se trata es de saber si puede eliminarse esa vaguedad que se cierne sobre el significado de las palabras en el lenguaje, o bien, si una lengua a la que se hubiese hecho alcanzar una precisión absoluta perdería por ello su expresividad. Para esta pregunta existen dos tipos de respuestas. Para unos, si bien las palabras son ambiguas, los conceptos son claros; de modo que aun cuando utilicemos la misma palabra, *estrella*, sabemos distinguir sus diferentes significados. El razonamiento lógico se interesa directamente en los conceptos, los cuales se vierten de manera imperfecta en el lenguaje. Por lo tanto, el razonamiento lógico es la osamenta del razonamiento cotidiano que, en teoría, podría expresarse en una lengua en la que los conceptos se encontraran aislados. Una de las funciones de la filosofía consiste precisamente en *crear conceptos*, es decir, en aislar la acepción de una palabra de la nebulosa que la rodea en el lenguaje cotidiano. Otros, en cambio, piensan que ciertos conceptos, en particular los conceptos morales, como la igualdad o la libertad, son en esencia abiertos y globales, por lo que resulta ilusorio pretender aislarlos en una acepción precisa. De acuerdo con esta última tesis, la lógica sólo se aplica a un campo restringido de razonamiento, que no es sino aquél en el que los conceptos se encuentran aislados, a saber: el razonamiento científico. Ese afán de precisión se encuentra, en efecto, en la base de todo procedimiento científico: los círculos viciosos y el círculo de mis amistades son hechos a un lado en la geometría, en donde un círculo no es sino el conjunto de puntos que ocupan un mismo plano y son equidistantes respecto de un punto determinado. De manera similar, el peso de las palabras y el peso del remordimiento se ignoran en la física, en donde el peso no es sino la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre un objeto.

Los ingredientes de las proposiciones lógicas

Con Aristóteles quedó establecida la oposición entre los objetos y las propiedades de éstos (o predicados). Por ejemplo, la palabra *Sherlock Holmes* designa un objeto particular, en tanto que la palabra *detective* designa una propiedad que en unos objetos se verifica y en otros no. Las proposiciones más sencillas se forman relacionando un objeto con una propiedad por medio del verbo *ser*, o bien por su negación:

"Sherlock Holmes es detective", "Arsenio Lupin no es detective". Pero Aristóteles no se interesó tanto en las proposiciones que se refieren a un objeto particular. Más bien, dirigió su atención a las proposiciones generales* que relacionaban propiedades entre sí: las que expresan que en todos los objetos en los que se verifica una propiedad A se verifica de igual manera una propiedad B ("Todos los detectives son inteligentes"), y las que enuncian que en algunos objetos en los que se verifica la propiedad A se verifica, asimismo, la propiedad B ("Algunos detectives son famosos"), así como las formas negativas de esas proposiciones.

Los objetos fueron integrados a los mecanismos de Aristóteles por Guillermo de Ockham (1285-*ca.* 1349), lo que permite, por ejemplo, formular el siguiente razonamiento: "Todos los detectives son inteligentes; Sherlock Holmes es detective; por lo tanto, Sherlock Holmes es inteligente."

Con los estoicos aparece asimismo la noción de proposición formada con la contribución de conjunciones. Por ejemplo, con la conjunción *y* y con las proposiciones "Sherlock Holmes es detective" y "Arsenio Lupin es ladrón" puede formarse la proposición "Sherlock Holmes es detective y Arsenio Lupin es ladrón".

Así pues, los lógicos de la Antigüedad y de la Edad Media disponían del concepto de *propiedad* de un objeto, si bien no disponían todavía del concepto de *relación* entre varios objetos. En la proposición "Romeo ama a Julieta", ellos distinguían una propiedad, *amar a Julieta*, que se aplicaba a un objeto, *Romeo*, y no una relación, *amar*, que se aplicaba a dos objetos: *Romeo* y *Julieta*. De esta manera, los antiguos trataban de manera global la locución *amar a Julieta* sin llegar jamás a descomponerla, por lo que era imposible que consideraran en su razonamiento proposiciones tales como "Todo el mundo ama a alguien" o "Todo el mundo ama a todo el mundo", en las que no sólo el sujeto, sino también el objeto, son generales. Fue necesario esperar a que aparecieran los trabajos de Gottlob Frege (1848-1925) para que los lógicos tomaran en cuenta las relaciones. Frege considera las relaciones que se aplican a dos, tres o más objetos, y con él las propiedades se transforman en relaciones particulares que se aplican a un solo objeto.

Una vez que se razona con relaciones, el mecanismo que permite formar proposiciones generales con los pronombres *todo* y *algún* resulta insuficiente debido a que no tarda en desembocar en ambigüedades. Por ejemplo, cuando se afirma que "Todo el mundo ama a alguien", con ello puede decirse, o querer decirse, que existe alguien a quien todo el mundo ama (por ejemplo, Marilyn Monroe), o bien, que cada cual ama a alguien, sin que ello signifique que todo el mundo ama por fuerza a la misma persona. A fin de salvar esta ambigüedad, Gottlob Frege y Charles Sanders Peirce (1839 - 1914) tomaron prestado del lenguaje matemático uno de sus mecanismos clave: la utilización de variables*.

Las variables se introdujeron en el lenguaje matemático con la finalidad de hablar de objetos que se encuentran aún parcialmente indeterminados. Antes de que se introdujeran las variables había que decir: "¿Cuál es el número que multiplicado por 37 es igual a 666?", o "¿Quién es el personaje que es detective y que vive en Baker Street?" François Viète (1540-1603), que fue matemático además de magistrado, concibió la idea de designar a esos objetos valiéndose de letras (las variables), con base en el modelo del lenguaje jurídico que designa de esa manera a los individuos que aún no han sido identificados (por ejemplo, cuando se levanta "una demanda contra X"). Así, a partir de Viète es posible decir: "¿Cuál es el número x, tal que $x \times 37$ es igual a 666?", o "¿Quién es el personaje x, tal que x es detective y x vive en Baker

Street?" La letra *x*, que tan a menudo se utiliza como variable, proviene de la griega χ (ji), que a su vez es una transformación del árabe *chay'*, que significa "cosa".

Frege y Peirce propusieron remplazar las expresiones *todo* o *algún* por las variables de las que a continuación se indica el significado y el alcance. Así, para decir que todo el mundo ama a Marilyn Monroe, se dirá: "Para todo *x*, *x* ama a Marilyn Monroe", y para decir que existe una persona a la que todo el mundo ama se dirá: "Existe un *y* tal que, para todo *x*, *x* ama a *y*". Esta proposición se distingue, por lo tanto, de "Para todo *x*, existe un *y* tal que *x* ama a *y*", lo que significa que cada cual ama a alguien sin que por ello deba entenderse que todo el mundo ama por fuerza a la misma persona.

Así pues, al finalizar el siglo XIX se aislaron los principales ingredientes que se utilizan en las proposiciones lógicas: los objetos y las relaciones, los cuales permiten formar proposiciones simples; las conectivas *y*, *o*, *no*, *si*, etc., que permiten formar esas proposiciones, y las variables y las expresiones "para todo *x*" y "existe un *x*", que permiten formar las proposiciones generales.

Un lenguaje para razonar

Las lenguas naturales ofrecen, pues, numerosos inconvenientes para razonar. Para comenzar, cierta vaguedad que se cierne sobre el significado de las palabras obliga a aislar a los conceptos. Después, los mecanismos que utilizan las lenguas naturales para expresar proposiciones generales son fuente de ambigüedades, de manera que resulta más conveniente usar variables.

Por otra parte, las lenguas naturales sufren del inconveniente de una gramática, por lo general bastante compleja, que se erige en obstáculo para la descripción del razonamiento. Por ejemplo, muchas categorías gramaticales de las lenguas naturales son equivalentes desde el punto de vista lógico. En las proposiciones "Sherlock Holmes reflexiona", "Sherlock Holmes es detective" y "Sherlock Holmes es inte-

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*
» 1 » *unitas.*
» $a+1$ » *sequens a, sive a plus 1.*
» $=$ » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \varepsilon N$.
2. $a \varepsilon N . \supset . a = a$.
3. $a, b \varepsilon N . \supset : a = b . = . b = a$.
4. $a, b, c \varepsilon N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c$.
5. $a = b . b \varepsilon N : \supset . a \varepsilon N$.
6. $a \varepsilon N . \supset . a + 1 \varepsilon N$.
7. $a, b \varepsilon N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1$.
8. $a \varepsilon N . \supset . a + 1 -= 1$.
9. $k \varepsilon K \therefore 1 \varepsilon k \therefore x \varepsilon N . x \varepsilon k : \supset_x . x + 1 \varepsilon k :: \supset . N \supset k$.

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1 ; 3 = 2 + 1 ; 4 = 3 + 1 ;$ etc.

Theoremata.

11. $2 \varepsilon N$.

Demonstratio :

$P 1 . \supset :$	$1 \varepsilon N$	(1)
$1 [a] (P 6) . \supset :$	$1 \varepsilon N . \supset . 1 + 1 \varepsilon N$	(2)
$(1) (2) . \supset :$	$1 + 1 \varepsilon N$	(3)
$P 10 . \supset :$	$2 = 1 + 1$	(4)
$(4) . (3) . (2, 1 + 1) [a, b] (P 5) : \supset :$	$2 \varepsilon N$	(Theorema).

La aritmética según Peano (1858-1932). *En busca de un lenguaje artificial.*

ligente", cierta propiedad se le atribuye a determinado individuo. El hecho de que esa propiedad se exprese con el verbo *reflexionar*, el sustantivo *detective* o el adjetivo *inteligente* es un detalle superficial que carece de significado lógico. Asimismo, la concordancia de los verbos constituye una redundancia superflua desde la perspectiva de la lógica, pues el hecho de escribir *reflexiona* en lugar de *reflexionar* en la proposición "Sherlock Holmes reflexiona" no tiene significado alguno. De igual manera, se puede prescindir de los pronombres personales en el caso de que se permitan las repeticiones y, así, por ejemplo, escribir "Sherlock Holmes es detective y Sherlock Holmes es inteligente" en lugar de "Sherlock Holmes es detective y él es inteligente", etcétera.

En consecuencia, los lógicos se ven impelidos a reformar esas lenguas y a crear lenguajes artificiales sumamente estilizados que atenúen esos inconvenientes. En esos lenguajes existen sólo tres categorías gramaticales: los símbolos de individuo, de función y de relación. Para designar un objeto se puede utilizar un símbolo de individuo, como *Sherlock Holmes*, *Baker Street* o *París*. También se puede designar un objeto indirectamente, como en la expresión: "La capital de Francia". Esta expresión está formada por una palabra (*capital*) que es preciso calificar por uno o por varios objetos (*Francia*). A una palabra semejante se le da el nombre de *símbolo de función*. Después, las proposiciones simples se forman con un símbolo de relación y con uno o varios objetos, como por ejemplo: "Sherlock Holmes es detective" o "Sherlock Holmes vive en Baker Street". Las proposiciones compuestas se forman con las conectivas *y*, *o*, *no*, *si*, etc., como por ejemplo: "Sherlock Holmes es detective y Arsenio Lupin es ladrón". Tenemos, por último, el mecanismo que permite expresar sin ambigüedades los hechos generales que se refieren a todos los objetos del discurso, o a un objeto, pero sin precisar cuál. Para esto se utilizan, como ya lo vimos, las variables y las expresiones "para todo *x*" y "existe un *x*".

La idea de crear deliberadamente esos lenguajes artificiales data de antiguo, pues se le atribuye a Raimundo Lulio (*ca.* 1235-1315). Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y George Boole (1815-1864) retomaron esa idea, pero no lograron obtener resultado alguno de orden práctico. Es en los trabajos de Frege en donde esa idea tomará realmente forma. Si los lógicos, de Lulio a Frege, han intentado emanciparse de las lenguas naturales, la historia reciente se caracteriza por el singular retorno de esa tentativa: al finalizar la década de los sesenta, el problema de la expresión del sentido lógico de las lenguas naturales recupera su actualidad a partir de los trabajos de Richard Montague (1930-1971), que fue lingüista y lógico. La idea ya no consiste en dotar a la lógica de lenguajes, sino en utilizarla como una herramienta que permita comprender mejor los mecanismos de las lenguas naturales.

Las piezas de un rompecabezas

Una vez que el lenguaje ha alcanzado la precisión es posible proceder a la descripción de los razonamientos en sí. La función elemental de un razonamiento consiste en deducir una proposición a partir de un conjunto de proposiciones cuya verdad se ha establecido. Por ejemplo, se puede deducir la proposición B de las proposiciones "Si A, entonces B" y "A". Si se sabe que "si Sherlock Holmes es detective, entonces Sherlock Holmes es inteligente", y que "Sherlock Holmes es detective", de lo anterior se puede deducir que "Sherlock Holmes es inteligente". De igual manera se puede deducir la proposición A de la proposición "A y B". Si se sabe que "Sherlock Holmes es detective y Arsenio Lupin es ladrón", de ello puede deducirse que "Sherlock Holmes es detective". Resulta aún más interesante el poder utilizar una proposición general con objeto de aplicarla a un caso particular. De la proposición "para todo *x*, A" es posible deducir la proposición A, donde la variable *x* se remplaza por una expresión que designa un objeto cualquiera. Si se sabe que todos los detectives son inteligentes ("para todo *x*, si *x* es detective, entonces *x* es inteligente"), puede deducirse que "si Sherlock Holmes es detective, entonces Sherlock Holmes es inteligente". Estas reglas, junto con otras más, reciben el nombre de reglas de deducción*.

La estilización del lenguaje permite poner de manifiesto la forma lógica de las proposiciones: existen proposiciones de la forma "A y B", de la forma "si A, entonces B", de la forma "para todo *x*, A", etc. Estas proposiciones son como las piezas de un rompecabezas. Las reglas de deducción indican cómo han de ensamblarse esas piezas: una pieza cuya forma es "si A, entonces B" se ensambla con una pieza de la forma A para formar una nueva pieza de forma B, la cual puede, a su vez, ensamblarse con otras piezas, y así sucesivamente.

Cuando sólo se utilizan las reglas de deducción, se puede establecer la verdad de proposiciones como la siguiente: "Si Sherlock Holmes es inteligente, entonces Sherlock Holmes es inteligente", si bien no es posible hacer lo mismo con proposiciones como ésta: "Sherlock Holmes es inteligente". Para poder razonar, además de las reglas de deducción es necesario contar con axiomas*, es decir, con proposiciones cuya verdad se admite sin demostración. Un conjunto de axiomas se denomina *teoría**.

Un razonamiento que establece la verdad de una proposición P (una demostración* de la proposición* P) es, por lo tanto, un encadenamiento de proposiciones que concluye en la proposición P, de modo que cada una de esas proporciones es, o un axioma, o bien se ha deducido de las proposiciones que la preceden por medio de una regla de deducción.

A manera de ejemplo, planteemos tres axiomas que expresen que Sherlock Holmes es detective, que los detectives son inteligentes, y que las personas inteligentes son excéntricas.

Sherlock Holmes es detective.
Para todo x, si x es detective, entonces x es inteligente.
Para todo x, si x es inteligente, entonces x es excéntrico.

El siguiente encadenamiento de proposiciones

Para todo x, si x es detective, entonces x es inteligente.
Si Sherlock Holmes es detective, entonces Sherlock Holmes es inteligente.
Sherlock Holmes es detective.
Sherlock Holmes es inteligente.

es un razonamiento correcto que establece la verdad de la proposición "Sherlock Holmes es inteligente". En efecto, la primera proposición es un axioma, en tanto que la segunda se deduce de la primera al remplazar la variable x por las palabras *Sherlock Holmes*. La tercera proposición es un axioma, y la última se deduce a partir de la segunda y de la tercera proposiciones.

Otro razonamiento (que utiliza más reglas de deducción que las que aquí hemos presentado) permite establecer que todos los detectives son excéntricos.

Para todo x, si x es detective, entonces x es inteligente.
Si x es detective, entonces x es inteligente.

Para todo x, si x es inteligente, entonces x es excéntrico.
Si x es inteligente, entonces x es excéntrico.
Si x es detective, entonces x es excéntrico.
Para todo x, si x es detective, entonces x es excéntrico.

Asimismo, todos los razonamientos que las lógicas de Aristóteles y de los estoicos pudieran expresar, se obtienen a partir de las modernas reglas de deducción.

¿Por qué hemos de creer en los axiomas?

La noción de *axioma* plantea un primer problema. La necesidad de contar con axiomas para razonar no explica por qué se accede a creer en su verdad. ¿Por qué, por ejemplo, aceptamos creer que Sherlock Holmes es detective? Un escepticismo de buena ley consistiría en negarse a creer si no media un razonamiento. Y a la inversa, cuando se busca hasta el cansancio un razonamiento sin poder dar con él, puede optarse por formular con carácter de axioma lo que se pretendía demostrar, medida ésta que resuelve (por no decir que elude) de inmediato el problema.

Los antiguos justificaban a los axiomas basándose en la evidencia de éstos. Es posible establecer el axioma según el cual Sherlock Holmes es inteligente, debido a que se trata de algo evidente. Por el contrario, una proposición que no es evidente requiere demostración. Pero entonces cabría preguntar de dónde procede la evidencia del hecho de que Sherlock Holmes es detective.

Asimismo, cabe preguntar por qué se cree (o se sabe) que todos los rubíes son rojos. No es, desde luego, en virtud de una verificación exhaustiva*, pues nadie ha verificado jamás ese hecho en todos los rubíes de la Tierra. Puede penciones es, o un axioma, o bien se ha deducido de las proposiciones que la preceden por medio de una regla de deducción.

A manera de ejemplo, planteemos tres axiomas que expresen que Sherlock Holmes es detective, que los detectives son inteligentes, y que las personas inteligentes son excéntricas.

> Sherlock Holmes es detective.
> Para todo *x*, si *x* es detective, entonces *x* es inteligente.
> Para todo *x*, si *x* es inteligente, entonces *x* es excéntrico.

El siguiente encadenamiento de proposiciones

> Para todo *x*, si *x* es detective, entonces *x* es inteligente.
> Si Sherlock Holmes es detective, entonces Sherlock Holmes es inteligente.
> Sherlock Holmes es detective.
> Sherlock Holmes es inteligente.

es un razonamiento correcto que establece la verdad de la proposición "Sherlock Holmes es inteligente". En efecto, la primera proposición es un axioma, en tanto que la segunda se deduce de la primera al remplazar la variable *x* por las palabras *Sherlock Holmes*. La tercera proposición es un axioma, y la última se deduce a partir de la segunda y de la tercera proposiciones.

Otro razonamiento (que utiliza más reglas de deducción que las que aquí hemos presentado) permite establecer que todos los detectives son excéntricos.

> Para todo *x*, si *x* es detective, entonces *x* es inteligente.
> Si *x* es detective, entonces *x* es inteligente.

Para todo *x*, si *x* es inteligente, entonces x es excéntrico.
Si *x* es inteligente, entonces *x* es excéntrico.
Si *x* es detective, entonces *x* es excéntrico.
Para todo *x*, si *x* es detective, entonces *x* es excéntrico.

Asimismo, todos los razonamientos que las lógicas de Aristóteles y de los estoicos pudieran expresar, se obtienen a partir de las modernas reglas de deducción.

¿Por qué hemos de creer en los axiomas?

La noción de *axioma* plantea un primer problema. La necesidad de contar con axiomas para razonar no explica por qué se accede a creer en su verdad. ¿Por qué, por ejemplo, aceptamos creer que Sherlock Holmes es detective? Un escepticismo de buena ley consistiría en negarse a creer si no media un razonamiento. Y a la inversa, cuando se busca hasta el cansancio un razonamiento sin poder dar con él, puede optarse por formular con carácter de axioma lo que se pretendía demostrar, medida ésta que resuelve (por no decir que elude) de inmediato el problema.

Los antiguos justificaban a los axiomas basándose en la evidencia de éstos. Es posible establecer el axioma según el cual Sherlock Holmes es inteligente, debido a que se trata de algo evidente. Por el contrario, una proposición que no es evidente requiere demostración. Pero entonces cabría preguntar de dónde procede la evidencia del hecho de que Sherlock Holmes es detective.

Asimismo, cabe preguntar por qué se cree (o se sabe) que todos los rubíes son rojos. No es, desde luego, en virtud de una verificación exhaustiva*, pues nadie ha verificado jamás ese hecho en todos los rubíes de la Tierra. Puede pensarse que debido a que hasta el día de hoy sólo se conocen rubíes rojos, a partir de ello se ha inducido una ley general. Sin embargo, no se nos oculta que nada hay de fortuito en el hecho de que sólo se conozcan rubíes rojos, porque cuando vemos una piedra verde no le damos a ésta el nombre de *rubí*. De donde se sigue que el color forma parte de la definición de *rubí*. El hecho de que todos los rubíes sean rojos no constituye una evidencia, pero tampoco se trata de algo que ha sido inducido a partir de observaciones, sino que forma parte de la definición de la palabra *rubí*.

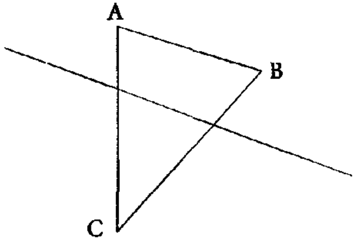
Lo mismo sucede con los axiomas de una teoría. El axioma "Sherlock Holmes es detective" resulta ser evidente sólo porque las palabras *Sherlock Holmes* y *detective* tienen para nosotros un significado preciso. Este significado podría expresarse traduciendo a otra lengua esas palabras; pero, para la lengua en que se formuló originalmente, sólo es posible expresar ese significado enunciando los axiomas que se está dispuesto a aceptar. Así pues, esos axiomas expresan el significado de las palabras del lenguaje. Si alguien propusiera plantear el axioma: "Sherlock Holmes es un ladrón", ello significaría simplemente que esa persona no le atribuye el mismo significado que nosotros le atribuimos a las palabras que figuran en esa proposición (quizá piensa en Arsenio Lupin cuando dice *Sherlock Holmes*, o en el oficio de ladrón cuando dice *detective*, o incluso en alguna otra cosa). De manera similar, las reglas de deducción expresan el significado de las palabras *y*, *o*, *si*, *para todo x*, etc. El hecho de poder deducir la proposición A de la proposición "A y B" forma parte del significado de la palabra *y*.

El matemático Henri Poincaré (1854-1912) expresó con toda claridad la idea anterior cuando afirmó que los axiomas de una teoría son "convenciones" o, lo que es más, "definiciones disfrazadas". Esto no significa por fuerza que las palabras sólo sean aglomeraciones de signos desprovistos de sentido, sino que es preciso dar a conocer las reglas del juego aun cuando se posea la percepción intuitiva de los objetos de los que se habla. Frege y, sobre todo, Ludwig Wittgenstein (1889-1951) llevaron la idea de Poincaré a sus últimas consecuencias al equiparar el significado de una palabra con el uso que de ella se hace en el lenguaje.

Crónica de unos esponsales

Quizá resulte sorprendente la presencia de Poincaré en medio de todos estos filósofos. Sin embargo, desde que las matemáticas existen, los matemáticos no han dejado de insistir en la importancia que el razonamiento reviste para su ciencia y han hecho de él la piedra angular de su método. Así, puede asombrarnos el hecho de que Euclides (siglo III a.C.), toda vez que pretende desarrollar la geometría* a partir de un reducido número de axiomas y demostrar todo lo que resta con la ayuda de razonamientos, no se apoye en la lógica de Aristóteles o en la de los estoicos. El problema reside en que en la época de Euclides los matemáticos requerían herramientas más sofisticadas que las que los lógicos podían ofrecerles. En efecto, ¿cómo expresar, si se carece de relaciones, uno de los primeros axiomas de la geometría, a saber: "Por dos puntos sólo puede pasar una y sólo una recta"?

Y a la inversa: si Euclides pretendió efectivamente demostrarlo todo a partir de sus axiomas, su afán de rigor no se hallaba aún lo suficientemente consolidado como para poder afirmar que, para él, esa era la forma de razonamiento que determina su corrección. Euclides se apoya todavía en su intuición de los objetos geométricos, como cuando, por ejemplo, admite sin que medie razonamiento que, en un triángulo ABC, si una recta corta el lado AC, entonces esa recta corta el lado AB o el lado BC.



Será necesario esperar a los trabajos de Moritz Pasch (1843-1930) para que ese hecho sea reconocido como uno de los axiomas de la geometría. Así, en el siglo XIX la geometría de Euclides fue reformulada con mayor rigor por Moritz Pasch y, luego, por David Hilbert (1862-1943). Además, si la geometría cuenta con axiomas gracias a Euclides, no es sino hasta el siglo XIX, con Giuseppe Peano (1858-1932), que se proponen axiomas para otras ramas de las matemáticas, como lo es, por ejemplo, la aritmética.

Así pues, estamos ante dos historias paralelas: una es la del razonamiento lógico, que a partir del rigor ha ido ganando poco a poco en expresividad, y la otra es la del razonamiento matemático, que a partir de la expresividad ha ido ganando poco a poco en rigor. El encuentro de ambos tuvo lugar, por fin, en las postrimerías del siglo XIX. Las teorías de Hilbert y de Peano eran lo suficientemente rigurosas como para poder afirmar que la corrección del razonamiento descansaba exclusivamente en su forma, y, por otra parte, el lenguaje lógico desarrollado por Frege contaba con la capacidad suficiente para expresar esas teorías.

En consecuencia, la lógica encontró en las matemáticas un campo de aplicación inmenso. Si las matemáticas se apoyaban exclusivamente en el razonamiento, todo cuanto la lógica descubría sobre este último era aplicable a las matemáticas. Y a la inversa, sucede que las matemáticas se abren y se muestran dispuestas a admitir cualquier discurso, siempre que éste se fundamente exclusivamente en el razonamiento. Las matemáticas no se definirán más por su objeto (los números y las figuras geométricas), sino por su método (el razonamiento).

Y es así como se habla de física matemática, de economía matemática, de lingüística matemática, etc., para designar a las ramas de esas ciencias que versan sobre conceptos aislados y que se apoyan exclusivamente en el razonamiento. De manera similar, la parte de la lógica que trata de los conceptos aislados y que se apoya únicamente en el razonamiento se ha transformado, a partir de Boole, en la lógica matemática. El razonamiento es tanto el objeto como el método de la lógica matemática.

¿Por qué tenemos necesidad de razonar?

SI CONTAMOS con otros medios para acceder a la verdad, ¿por qué construir un razonamiento complejo para saber que en la pastelería de la esquina se venden tartas de manzana, cuando para ello bastaría con mirar al escaparate? Asimismo, ¿por qué construir un razonamiento con objeto de saber que 18 × 37 es igual a 666, toda vez que bastaría con efectuar esa multiplicación? ¿Por qué razonar, si al parecer resulta tan fácil observar y calcular? Simplemente, porque, por desgracia, no siempre es posible observar y calcular.

En el país de las maravillas

En algunas ocasiones, la observación resulta imposible debido a simples razones técnicas: así, se puede observar una tarta de manzana en el escaparate de una pastelería cuando ésta se encuentra abierta, pero no cuando han bajado la cortina. Además, en algunos casos la observación es de suyo imposible. En efecto, nos servimos del lenguaje para hablar de las cosas que acontecen en nuestro mundo, pero también para relatar historias que tienen lugar en mundos imaginarios, donde las rosas se resfrían y los baobabs crecen sobre los asteroides. La observación resulta imposible en este tipo de discurso en el que los objetos no tienen existencia material. De nada sirve mirar por un telescopio a fin de averiguar si hay baobabs en el planeta del Principito. Un suceso semejante no tiene lugar en el cosmos.

Distinguimos así, en el dominio de las ciencias, las ciencias experimentales* (física, biología, antropología, etc.), que estudian el mundo que nos rodea, de las matemáticas, que estudian objetos abstractos. Al igual que los baobabs del Principito, los objetos matemáticos carecen de existencia material. Todo el mundo ha visto cuatro manzanas, pero nadie ha visto jamás el número 4.

Cálculos y razonamientos

Incluso cuando el objeto del discurso es abstracto y la observación resulta imposible, nos queda aún el recurso del cálculo. Por ejemplo, no es necesario razonar para saber que es verdadera la proposición "el marido de Yocasta es el padre de Edipo". Basta con calcular *el marido de Yocasta* y *el padre de Edipo*. Ambos cálculos nos proporcionan el mismo nombre: *Layo*, de donde se concluye que la proposición es verdadera. Asimismo, no es necesario razonar para verificar que la proposición: "La palabra *oso* es un palíndromo" es verdadera (un palíndromo es una palabra, o un agrupamiento de palabras, que puede leerse indistintamente de izquierda a derecha o de derecha a izquierda). Basta con invertir esa palabra y verificar que el resultado es el mismo. En fin, no es necesario razonar para comprobar que 18 x 37 es igual a 666, pues basta con efectuar la multiplicación correspondiente.

Esas proposiciones incluyen en su formulación la indicación del procedimiento que se debe seguir para averiguar si son verdaderas o falsas. Ese procedimiento se denomina cálculo, y entonces se afirma que las citadas proposiciones son accesibles al cálculo. Así entendido, el cálculo no se limita a los números, sino que puede referirse a cualquier objeto material o abstracto. Todas las teorías parten inicialmente de proposiciones simples que en su formulación indican el cálculo que habrá de efectuarse a fin de establecer su verdad.

Pero el cálculo no tarda en poner de manifiesto sus límites. Puede verificarse que la primera y la última letras de la palabra *oso* son idénticas, y es posible comprobar que sucede lo mismo con *acá* y con *Dábale arroz a la zorra el abad*, etc. Un poco de curiosidad nos llevará finalmente a preguntarnos si no habría, por casualidad, una regla general detrás de todo ello, a saber, que la primera y la última letras de un palíndromo son siempre las mismas. También puede verificarse por medio del cálculo que 0+0 es igual a 0, ya que 1+0 es igual a 1, 2+0 es igual a 2, 3+0 es igual a 3, etc., e incluso en este caso se manifestará una ley general: sumar 0 a cualquier número no altera el número.

Los límites del cálculo se ponen de manifiesto cuando se pretende establecer semejantes verdades generales, ya no para un objeto en particular, sino para todos los objetos del discurso. Para verificar exhaustivamente que sumar 0 a un número no altera el número, habría que verificar los casos del número 0, del número 1, del número 2, del número 3, etc. Cada caso precisa sólo de un sencillo cálculo, pero como existe una infinidad de números, habría que verificar entonces una infinidad de casos. Dicho de otra manera, la ley general en cuestión no puede establecerse por medio del cálculo. La verificación exhaustiva de las proposiciones generales es posible sólo cuando esas proposiciones abarcan un número finito de objetos; es decir, cuando el universo del discurso (el universo de objetos de los que habla la teoría) es finito.

Cuando el universo del discurso es infinito se presentan dos posibilidades: o se establece la verdad de la proposición general mediante un razonamiento, o bien se verifica un número finito de ejemplos y se adopta la ley general. Como es natural, este último método, la inducción*, puede llevarnos a admitir cosas falsas. Por ejemplo, durante mucho tiempo se creyó que el Sol salía todos los días en todos los puntos del planeta, hasta que Piteas (siglo IV a.C.) cruzó el círculo polar y descubrió el sol de medianoche. Las ciencias que utilizan la inducción se ven obligadas en algunas ocasiones a reexaminar los resultados obtenidos una vez que éstos han dejado de corresponder a la experiencia.

La inducción, o un mecanismo similar que permita adoptar proposiciones generales, resulta indispensable en aquellas ciencias experimentales en las que no es posible establecer axiomas definitivos, y ello se debe a que el mundo material va descubriéndose poco a poco en la experiencia. Sin axiomas no es posible establecer, valiéndose únicamente de la observación y del razonamiento, que, por ejemplo, todos los carneros tienen cuatro patas. En consecuencia deberá utilizarse la inducción. Por el contrario, para los objetos abstractos, que en teoría han sido definidos de una vez para siempre, pueden establecerse axiomas y, por lo tanto, establecer la verdad de proposiciones generales por medio del razonamiento. Por ejemplo, puede establecerse por medio del solo razonamiento que $x + 0$ siempre es igual a x. Resulta entonces preferible prescindir de la inducción y apoyarse únicamente en el razonamiento.

Así, se puede recurrir al razonamiento cuando la observación y el cálculo no tienen cabida. En el caso de un discurso que verse sobre objetos abstractos, se razona con la finalidad de establecer hechos que no son accesibles al cálculo: en algunas ocasiones para las proposiciones particulares, y en todo caso para las proposiciones generales, cuando el universo del discurso es infinito. De manera que las matemáticas pueden definirse como la ciencia de los universos abstractos y, además, infinitos, lo que justifica que en ella se emplee exclusivamente el razonamiento (en efecto, en ella la observación es imposible, el cálculo resulta insuficiente y la inducción es evitable).

Asimismo, en el caso de un discurso que verse sobre el mundo material puede recurrirse al razonamiento para establecer hechos que no pueden observarse; sin embargo, en este caso el razonamiento se utiliza junto con otras figuras: la observación y la inducción.

La exactitud de los razonamientos accesibles al cálculo

Para establecer la verdad de la proposición P, "todos los detectives son excéntricos", hemos procedido a demostrarla, es decir, a presentar un encadenamiento de proposiciones E que concluyen en la proposición P, de manera que cada una de ellas, o es un axioma, o bien se ha deducido de las proposiciones que la anteceden mediante una regla de deducción (véase la página 24).

Ahora bien, ¿es evidente que el encadenamiento E es una demostración de la proposición P? Puede pensarse que para confirmarlo se requiere otra demostración, y después, claro, otra más con objeto de demostrar que la anterior es adecuada, y así sucesivamente hasta el infinito. De modo que por este motivo cabe preguntarse si los razonamientos que no hacen sino reenviar la verdad de la proposición P a la verdad de la proposición "el encadenamiento E es una demostración de la proposición P" no son argumentos circulares. El argumento "la proposición 'todos los detectives son excéntricos' es verdadera porque el encadenamiento E es su demostración", ¿acaso no resulta tan superfluo como el argumento "la proposición 'todos los detectives son excéntricos' es verdadera porque todos los detectives son excéntricos"?

En cierto sentido así es, y esa circularidad resulta inevitable: para argumentar una proposición del lenguaje sólo contamos con el lenguaje. Sin embargo, existe una gran diferencia entre la proposición "todos los detectives son excéntricos" y la proposición "el encadenamiento E es una demostración de la proposición 'todos los detectives son excéntricos'", debido a que ésta no es una proposición general y, por lo mismo, puede verificarse por medio del cálculo: un somero examen del encadenamiento muestra que cada proposición es, o un axioma, o bien se ha deducido de las proposiciones que la anteceden, de modo que la última proposición es, sin más, la que se quería demostrar. Por este motivo, establecer la verdad de esa proposición no requiere razonamiento alguno.

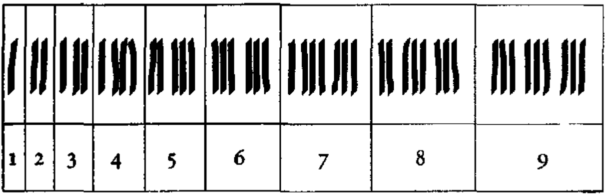
Dar una demostración permite entonces reenviar la verdad de una proposición que no es directamente verificable por medio del cálculo (la proposición P que se demuestra) a la verdad de una proposición directamente verificable (la proposición "el encadenamiento E es una demostración de P"). Ahora bien, no es la verdad de las proposiciones directamente verificables lo que plantea un problema, sino precisamente la verdad de las proposiciones que no son directamente verificables. Por lo tanto, es necesario ponerse previamente de acuerdo sobre la noción de *verdad* con objeto de definir la noción de *razonamiento*, aun cuando esa noción de *verdad* se refiera únicamente a una reducida porción del lenguaje, la cual no comprende a las proposiciones generales, y, además, esa porción del lenguaje es justamente aquella en la que la noción de *verdad* ofrece menos problemas.

El razonamiento, una prolongación del cálculo

Así pues, el cálculo y el razonamiento constituyen dos maneras muy diferentes de establecer la verdad de una proposición. Para establecer la verdad de una proposición por medio del cálculo se aplica un método sistemático, en tanto que para establecer la verdad de esa misma proposición por medio del razonamiento se utilizan axiomas y reglas de deducción para formular proposiciones hasta obtener la proposición que se busca.

Si se propone remplazar el cálculo por el razonamiento como método para acceder a la verdad de las proposiciones del lenguaje, entonces será preciso demostrar que el razonamiento es una prolongación del cálculo; es decir, habrá que demostrar, en primer lugar, que es posible establecer por medio del razonamiento la verdad de todas las proposiciones cuya verdad puede establecerse por medio del cálculo y, luego, que ello puede hacerse mejor con el razonamiento que con el cálculo, o sea establecer la verdad de las proposiciones generales con un universo de discurso infinito.

Por ejemplo, veamos cómo el razonamiento permite establecer una proposición cuya verificación por medio del cálculo requiere una sencilla suma, como $2 + 2 = 4$. Primero se determina un lenguaje para hablar de los números. Aquí utilizaremos la notación primitiva que consiste en denotar el número n por n bastones. También podríamos utilizar la



Los números arameos de Egipto. *El número* n *se denota con* n *bastones. Sistema de Elefantina, siglo V-III a.C.*

notación decimal acostumbrada, lo cual complicaría la exposición. Consideremos, entonces, un lenguaje que incluya dos símbolos de individuo: 0 y 1, un símbolo de función: +, y un símbolo de relación: =. Por ejemplo, el número 3 se escribirá como sigue: 0 + 1 + 1 + 1.

Para sumar dos números representados por bastones, se eliminan, uno a uno, los bastones del número que figura a la izquierda, y en cada ocasión se añade un bastón a la derecha. Cuando deja de haber bastones a la izquierda, el resultado del cálculo se lee a la derecha. Por ejemplo, el cálculo de 2 +2 se efectúa de la siguiente manera:

$$||+|| \rightarrow |+||| \rightarrow .+|||| \rightarrow ||||$$

El resultado es 4.

A efecto de razonar sobre esos números representados por bastones se emplean dos axiomas: "Para todo x y para todo y, $(x + 1) + y = x + (y + 1)$", y "para todo x, $0 + x = x$".

Para demostrar que 2 + 2 es igual a 4 se comienza por remplazar x por 0 + 1 y y por 0 + 1 + 1 en el primer axioma. Se obtiene así la proposición $(0 + 1 + 1)+(0 + 1 + 1) = (0 + 1) + (0 + 1 + 1 + 1)$, es decir, 2 + 2 = 1 + 3. De la misma manera se establece 1 + 3 = 0 + 4, y por último, con el segundo axioma: $0 + 4 = 4$. De donde se deduce $2 + 2 = 4$. En este ejemplo vemos que un cálculo se traduce directamente en un razonamiento: el primer axioma permite hacer pasar un bastón de uno a otro lado, en tanto que el segundo axioma permite concluir una vez que ya no quedan bastones en el lado izquierdo .

Por otra parte, resulta evidente que el razonamiento permite establecer la verdad de hechos generales debido a que los axiomas, como los que aquí hemos empleado, pueden, de antemano, referirse a hechos generales. A continuación pueden deducirse otros hechos generales. Por ejemplo, si en el primer axioma se remplaza x por 0, entonces se deduce que "para todo y, $(0 + 1) + y = 0 + (y + 1)$".

El razonamiento y la regularidad de los cálculos

Si se quisiera establecer la verdad de la proposición: "Para todo y, $(0 + 1) + y = 0 + (y + 1)$" por medio del cálculo, sería necesario verificar los casos en que y vale 0, 1, 2, 3, etc., lo que requeriría una cantidad infinita de cálculos. Todos estos cálculos son diferentes, pero no completamente irregulares. Por ejemplo, entre el cálculo que permite establecer el caso en el que y vale 5, y el que permite establecer el caso en el que y vale 6, existe, no obstante, cierta similitud: en ambos basta con hacer pasar un bastón de la izquierda a la derecha, y ello aun cuando ya hubiera 5 o 6 bastones a la derecha.

| + | | | | | → . + | | | | | |
| + | | | | | | → . + | | | | | | |

Es esta regularidad la que expresa el razonamiento que constituye una especie de forma genérica del cálculo, en la cual el número de bastones que ya figuran a la derecha se representa esquemáticamente mediante la variable y.

$$| + \underbrace{| \ldots |} \qquad . + \underbrace{| \ldots |}\,|$$

En algunas ocasiones, los cálculos resultan menos regulares que en el ejemplo anterior; no obstante, poseen la suficiente regularidad como para poder concurrir en un razonamiento. Por ejemplo, para la proposición: "Para todo x, $x + 0 = x$", es necesario hacer pasar cinco bastones de la izquierda a la derecha cuando x vale 5, en tanto que cuando x vale 6 es preciso hacer pasar seis bastones. Quienes están familiarizados con el razonamiento matemático se percatarán de que en este caso es necesario utilizar el axioma de recurrencia* a fin de demostrar esa proposición.

La confiabilidad del razonamiento

Cuando una cuestión es susceptible de ser tratada por medio del cálculo, éste resulta ser una herramienta bastante confiable. Para comenzar, sabemos cómo verificar, por ejemplo, que la proposición "$18 \times 37 = 666$" es verdadera: basta con efectuar la multiplicación, lo que forma parte de la rutina. A continuación, cuando se pregunta si 18×37 es igual a 666, siempre habrá un cálculo que permita responder sí o no. El cálculo proporciona invariablemente una respuesta. Por último, si el cálculo indica que la proposición "$18 \times 37 = 666$" es verdadera, por la misma razón indica que la proposición contraria "$18 \times 37 \neq 666$" es falsa. El cálculo nunca proporciona dos respuestas contradictorias. En resumen, el cálculo se apoya en un método sistemático, siempre ofrece una respuesta y nunca proporciona dos respuestas contradictorias entre sí. Lo mismo sucede con la observación, por lo menos en su forma más ingenua.

El razonamiento, en cambio, no presenta esas cualidades de manera tan evidente. Cuando Sherlock Holmes se propone resolver un enigma, es posible dudar que disponga de un método sistemático y pensar que por fuerza ha de avanzar un poco a tientas. Luego, no resulta tan evidente que esos enigmas tengan siempre una solución, pues podría muy bien suceder que hubiera problemas insolubles, crímenes perfectos. Por último, ¿resulta del todo claro que razonando no puede llegar a demostrarse una cosa y su contrario, cuando los buenos oradores al parecer siempre dan con un sofisma* a fin de convencernos de lo que ellos quieren?

Esas son algunas de las preguntas a las que intentaremos dar respuesta. Como lo veremos, en algunas ocasiones las respuestas resultan sorprendentes.

LA IMPOSIBILIDAD DE REDUCIR EL RAZONAMIENTO AL CÁLCULO

EL PROCEDIMIENTO a seguir para establecer la verdad de una proposición por medio del cálculo lo indica la misma proposición. Por el contrario, establecer la verdad de una proposición por medio del razonamiento no se presta a la aplicación de un método sistemático de manera natural: en este caso es necesario encontrar un encadenamiento de proposiciones que conduzcan a la proposición que se pretende demostrar. Ese encadenamiento no está contenido en la proposición de suyo, y por ello es preciso realizar un esfuerzo de inventiva para encontrarlo. De esta manera, buscar un razonamiento a veces se asemeja a buscar una aguja en un pajar: una oscura intuición parece guiarnos en una u otra dirección; los caminos prometedores acaban por ser callejones sin salida, y a veces el resultado suscita un *¡Eureka!* de entusiasmo.

Razonar con método

Por fortuna, buscar un razonamiento no siempre resulta tan arriesgado. En algunos casos es posible aplicar métodos sistemáticos. Por ejemplo, para demostrar que un número es impar, basta verificar que acaba en alguna de las siguientes cifras: 1, 3, 5, 7 o 9. También es posible construir razonamientos que indiquen que los números 13 o 15 son impares, sin que para ello sea necesario hacer alarde de imaginación.

La proposición "para todo x, $2 \times x \neq n$" (que significa: "el número n es impar) es general, de modo que su verdad no se puede establecer aplicando un método de cálculo* ingenuo, el cual implica en una verificación exhaustiva de los casos en los que x tiene un valor de 0, 1, 2, 3, etc., si bien se puede establecer utilizando un método indirecto, que consiste en verificar que la última cifra del número n es 1, 3, 5, 7 o 9. Asimismo, muchos de los problemas que se formulan por medio de una proposición general se pueden resolver utilizando un método sistemático que ha sido hallado *a posteriori*.

Así, uno puede verse tentado a buscar un método general que permita determinar si una proposición es o no demostrable, es decir, si existe o no un razonamiento que establezca su verdad. De este modo, la búsqueda de un razonamiento se orienta a la aplicación de un método rutinario y sistemático, similar al que se utiliza para verificar una proposición del tipo "el número n es impar". La concepción de un método semejante constituye uno de los ejes del programa que Hilbert* propuso a principios de los años veinte.

La noción de *razonamiento* se introdujo porque las proposiciones generales no manifiestan, de manera espontánea, la exigencia de ser calculadas. Hay un proyecto de cálculo en las proposiciones "el marido de Yocasta es el padre de Edipo", "la palabra *oso* es un palíndromo" o "$18 \times 37 = 666$", pero no lo hay en la proposición "la primera y la última letras de todo palíndromo son idénticas", o en la proposición "para todo x, $x + 0 = x$". Sin embargo, ello no excluye *a priori* la existencia de un método indirecto, como el que existe para ciertos casos particulares, como por ejemplo, el de las proposiciones del tipo "el número *n* es impar". La cuestión de fondo que plantea el programa de Hilbert es, entonces, la siguiente: el hecho de que las proposiciones generales no ofrezcan la posibilidad de efectuar cálculos con ellas, ¿debe atribuirse sólo a una razón superficial de formulación, o hay una razón más profunda? Dicho de otra manera, la diferencia entre el razonamiento y el cálculo, ¿es una diferencia que sólo responde a la forma en que ambos se formulan, o en realidad el razonamiento es una herramienta más poderosa que el cálculo?

La idea de Hilbert, manifiestamente optimista en tanto que reflejo de su época, era que no existía una diferencia considerable entre el cálculo y el razonamiento. Para probarlo se propuso demostrar que el razonamiento era reductible al cálculo. Con ello esperaba, sobre todo, hacer patente que el razonamiento era tan confiable como el cálculo y que, en particular, proporcionaba siempre una respuesta y que jamás ofrecía dos respuestas contradictorias. Por lo demás, el programa de Hilbert no carecía de interés práctico: un método semejante habría dispensado definitivamente a la humanidad de la tarea de tener que urdir razonamientos. Y todos aquellos que ya se habían "consumido" en la búsqueda de una demostración, sin duda no dejarían de apreciar el poder disponer de un método sistemático. Pero el programa de Hilbert fracasó: en 1936, Alonzo Church (nacido en 1903) y Alan Turing (1912-1954) probaron que no podía existir un método de cálculo que indicara si una proposición era o no demostrable. El razonamiento, entonces, es una herramienta realmente más poderosa que el cálculo.

La universalidad del lenguaje

El argumento de Church y de Turing puede entenderse de la siguiente manera: el lenguaje es una herramienta universal, no importa cuál sea el problema que se reduzca a saber si una proposición es verdadera o falsa. Saber que el Principito vive en el asteroide B 612 es saber que la proposición "el Principito vive en el asteroide B 612" es verdadera, y es conocer una demostración que utiliza como axiomas la información que se proporciona en el relato.

En el caso de que se dispusiera de un método para construir razonamientos, bastaría aplicarlo a una proposición cualquiera para obtener ya sea un razonamiento que establezca su verdad, ya sea la información de que semejante razonamiento no existe. Ese método permitiría saber si el Principito vive en el asteroide B 612, pues bastaría aplicarlo a la proposición "el Principito vive en el asteroide B 612"; permitiría saber si el número 13 es impar, pues bastaría aplicarlo a la proposición "el número 13 es impar"; permitiría saber si el teorema de Pitágoras es verdadero, pues bastaría aplicarlo al enunciado de este teorema, etc. Un método como ése sería similar a la panacea de los alquimistas: una respuesta universal a todas las preguntas. Ahora bien, una de dos: o esa panacea existe y todos los problemas pueden resolverse por medio de un simple cálculo, o bien no existe y el programa de Hilbert no puede verse coronado por el éxito. Basta, pues, con encontrar un solo problema que no sea posible resolver por medio del cálculo para probar que el programa de Hilbert resulta ilusorio.

El problema de la intermisión

Poco antes de probar que no existe un método de cálculo que indique si una proposición es o no es demostrable, Church, Stephen Kleene (1909-1994) y Turing dieron con un problema que no podía solucionarse por medio del cálculo. Ese problema se conoce como el *problema de la intermisión**.

Un método de cálculo puede comprender etapas que consisten en inquirir por un objeto que posea cierta propiedad. Con este fin, puede ensayarse sucesivamente con todos los objetos hasta encontrar el que convenga. Por ejemplo, si desea averiguarse cuál es el número entero cuyo doble es 12, se puede ensayar con los números 0, 1, 2, etc., hasta dar con el número en el que se verifique esa propiedad. Debido a la presencia de esas etapas de búsqueda, algunas expresiones de métodos de cálculo no corresponden a verdaderos métodos en la medida en que no siempre proporcionan un resultado. A esos métodos se les denomina *métodos parciales*. Por ejemplo, si se busca un número entero cuyo doble sea 13, el ensayar sucesivamente con los números 0, 1, 2, 3, etc., jamás llevará a un resultado, de modo que la búsqueda proseguirá indefinidamente.

El problema de la intermisión consiste en preguntarse si un método de cálculo proporciona o no un resultado. Church, Kleene y Turing probaron que ese problema no puede resolverse por medio del cálculo, pues si existiera un método de cálculo capaz de analizar a los otros métodos con objeto de determinar si éstos proporcionan o no un resultado, entonces podría construirse un método que analizara a los otros métodos y que proporcionara un resultado sólo cuando no pudiera hacerlo así el método analizado. Ahora bien, un método semejante no puede existir. En efecto, si existiera, ese método podría, entre otros, analizarse a sí mismo. De ser así, debería proporcionar un resultado en el caso de que no lo proporcionara, y no proporcionarlo en el caso de que lo proporcionara, lo que es incoherente. Reconocemos en este argumento una variante de la paradoja* de Epiménides, filósofo cretense (siglo VI a.C.), que pretendía que todos los cretenses eran mentirosos.

El lenguaje, a condición de ser universal, permite expresar proposiciones de la forma "el método de cálculo M proporciona un resultado". Para poder utilizar el resultado de Church, Kleene y Turing, todavía es preciso que para todo método de cálculo M exista una demostración de que M proporciona un resultado o de que M no proporciona un resultado. De hecho, basta con que exista una demostración de que M proporciona un resultado cada vez que efectivamente es el caso (es decir, que la información de que la proposición "el método M proporciona un resultado" no es demostrable vale tanto como la demostración de que el método M no proporciona un resultado).

Es posible construir una teoría semejante. Si existiera un método de cálculo para determinar si una proposición es o no es demostrable, bastaría con aplicarlo a esa proposición para determinar si el método de cálculo M proporciona o no un resultado. De esa manera quedaría resuelto el problema de la intermisión, en contradicción con el resultado de Church, Kleene y Turing. No puede existir, pues, un método como ése. Reducir el razonamiento a un cálculo, incluso menos ingenuo que el examen exhaustivo de todos los casos, es imposible, y el programa de Hilbert es ilusorio. En consecuencia, el razonamiento es intrínsecamente una herramienta más poderosa que el cálculo.

La biblioteca de Babel

El resultado de Church y de Turing prueba que no existe un método para determinar si una proposición es o no es demostrable. En cambio, existe un método parcial muy sencillo que permite construir un razonamiento cuando una proposición es demostrable, si bien prolonga indefinidamente la búsqueda cuando la proposición no es demostrable.

En efecto, un razonamiento es un encadenamiento de proposiciones. Una proposición es un encadenamiento de palabras, y las palabras son, a su vez, encadenamientos de letras. Así pues, un razonamiento no es sino una mera sucesión finita de caracteres tipográficos (las 29 letras del alfabeto y algunos signos de puntuación). Si se enumeran todos los textos formados por un carácter, luego todos los que están formados por dos caracteres, a continuación los que están integrados por tres caracteres, etc., se enumerarán todos los textos posibles: *a*, *b*, *c*, ..., *aa*, *ab*, *ac*, etcétera.

Esa enumeración de textos producirá todo cuanto es posible escribir en todas las lenguas: la historia pormenorizada del futuro, la novela de Jorge Luis Borges intitulada *La biblioteca de Babel*, cada uno de los volúmenes de esta colección al derecho y al revés, etc. Elijamos, por ejemplo, la siguiente proposición: "Sherlock Holmes es inteligente". Para cada uno de los textos de la enumeración, una sencilla verificación nos indicará si hemos dado con un razonamiento que establece la verdad de nuestra proposición o con uno que no lo hace. El texto *a* no es un razonamiento que nos permita establecer nuestra proposición; tampoco lo es el texto *b*, etc.; sin embargo, algún día aparecerá en la enumeración el siguiente texto:

Para todo *x*, si *x* es detective, entonces *x* es inteligente.
Si Sherlock Holmes es detective, entonces Sherlock Holmes es inteligente.
Sherlock Holmes es detective.
Sherlock Holmes es inteligente.

El texto anterior es una demostración correcta de nuestra proposición en el marco de la teoría que comprende los axiomas del primer capítulo. En términos generales, si existe un razonamiento que establezca la verdad de la proposición en cuestión, entonces ese razonamiento aparecerá en la enumeración exhaustiva de los textos, y nosotros lo identificaremos.

Es verdad que la búsqueda corre el riesgo de ser larga y fastidiosa. Es un poco como si, cuando el grifo gotea, marcamos todas las combinaciones posibles de números telefónicos hasta dar con el de un plomero. Un método de esta índole no es realista, pero tiene el mérito de existir, lo que basta para probar su posibilidad teórica. Si se desea utilizarlo en la práctica, podría reflexionarse sobre la manera de mejorarlo.

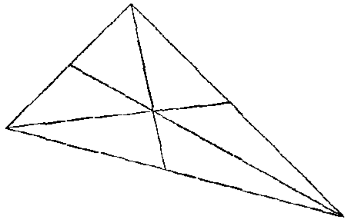
Hay aquí, pues, un resultado a medias tintas. Es indudable que el razonamiento no puede reducirse al cálculo en el sentido usual, es decir, de manera que siempre proporcione un resultado. En cambio, puede reducirse a una forma más extensa de cálculo, sin que proporcione siempre un resultado, pero que permita proseguir indefinidamente la búsqueda del resultado en el caso de que la proposición no sea demostrable. De modo que tanto el cálculo como el razonamiento se apoyan, en cierto sentido, en un método sistemático, si bien discrepan en el hecho de que, cuando se comienza un cálculo, se tiene la seguridad de que éste concluirá, y en general es posible estimar *a priori* cuánto tiempo o cuánto trabajo requerirá; en tanto que, cuando se inicia la búsqueda de un razonamiento, no es posible saber siquiera si algún día se encontrará.

Las contadas teorías reductibles al cálculo

Para los optimistas, la imposibilidad de reducir el razonamiento al cálculo (que siempre proporciona un resultado) prueba que el razonamiento es intrínsecamente una herramienta más poderosa que el cálculo. Pasar de uno al otro significó un progreso auténtico para la humanidad. Para los pesimistas, dicha imposibilidad pone de manifiesto la existencia de un límite infranqueable que impide aproximarse a los problemas de manera metódica.

Un triste consuelo es que existen teorías (es decir, conjuntos de axiomas) demasiado limitadas como para expresar proposiciones del tipo "el método de cálculo M proporciona un resultado". En esas teorías es posible concebir métodos de cálculo que encuentren todos los razonamientos y que indiquen en qué casos no existe un razonamiento semejante. Como es natural, las teorías cuyo universo de discurso es finito se encuentran en este caso, aunque no son las únicas. El ejemplo más sorprendente es el de la geometría elemental, que Alfred Tarski (1902-1983) demostró en 1930 que puede reducirse al cálculo.

El resultado de Tarski utiliza, en primer lugar, la observación de René Descartes (1596-1650), según la cual los problemas de la geometría elemental pueden transformarse en problemas de números reales (es decir, enteros o no) si se hacen corresponder estos números con las abscisas y las ordenadas mediante la elección de un punto de referencia. A continuación, Tarski probó que es posible resolver los problemas relativos a los números reales por medio de un sencillo cálculo. Por ejemplo, para demostrar que las medianas de un triángulo son concurrentes, el método de Tarski consiste en calcular la ecuación de las tres medianas y verificar que el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas siempre tiene una solución. Para ese fin, basta calcular la abscisa y la ordenada del punto de intersección de dos de las medianas y asegurarse de que dichas coordenadas satisfacen la ecuación de la tercera mediana. De esta manera, los problemas de la geometría que otrora requerían mucho ingenio ahora pueden resolverse por medio de la aplicación de un



método sistemático. El método de Tarski y los métodos relacionados con él que se desarrollaron posteriormente requieren, en general, una considerable cantidad de cálculos. No fue sino hasta que pudo disponerse de calculadoras que esos métodos resultaron prácticos.

Por desgracia, el caso de la geometría es harto singular y, por ejemplo, la teoría de los números enteros, que incluye símbolos para el número cero, el número uno, la suma y la multiplicación, no se puede reducir al cálculo.

NI SÍ NI NO

CUANDO SE quiere establecer por medio del cálculo la verdad de la proposición "$18 \times 37 = 666$", se efectúa el cálculo y se concluye que esa proposición es verdadera. Cuando se quiere establecer la verdad de la proposición "$18 \times 37 = 667$", se efectúa el cálculo y se concluye que la proposición es falsa. La verdad de la proposición "$18 \times 37 \neq 667$" se establece de la misma manera. El cálculo jamás responde *no sé.* David Hilbert, un optimista incorregible, pensaba que lo mismo sucedía con el razonamiento. Afirmaba que en las matemáticas cada problema tenía solución. Pensar esto último equivale a pensar que cuando no es posible demostrar una proposición siempre podrá demostrarse su negación.

El teorema de Gödel

Sin embargo, a primera vista no existe una relación manifiesta entre la ausencia de demostración para una proposición y la existencia de una demostración para su negación. El hecho de que el razonamiento sea extrínseco a la proposición y de que, además, no exista un método sistemático para buscar ese razonamiento nos obliga a ser prudentes. El célebre teorema de incompletitud*, demostrado en 1931 por Kurt Gödel (1906-1978), prueba que esa prudencia está justificada: no siempre existe un razonamiento para establecer la verdad de una proposición o la de su negación. En efecto, si existiera siempre un razonamiento para establecer la verdad de una proposición o de su negación, el razonamiento podría reducirse al cálculo, lo cual está en contradicción con el resultado obtenido por Church y Turing.

El método del cálculo hipotético, que indicaría si una proposición puede o no ser establecida por medio de un razonamiento, no deja de apoyarse en una enumeración de los textos. Elijamos, por ejemplo, la siguiente proposición: "Sherlock Holmes es inteligente", y comencemos a enumerar todos los textos posibles *a*, *b*, *c*, etc. Para cada texto, una sencilla verificación nos indicará si hemos dado con un razonamiento que establece, o no, la verdad de nuestra proposición. Si existe un razonamiento que establezca la verdad de la proposición en cuestión, entonces ese razonamiento aparecerá en la enumeración y lo identificaremos. Pero si ese razonamiento no existe, la enumeración de los textos proseguirá indefinidamente sin que jamás obtengamos un resultado. Por lo tanto, ese método es parcial.

Ahora bien, si formulamos la hipótesis de que siempre existe un razonamiento para establecer la verdad de una proposición o de su negación, en el caso de que nuestra proposición no pueda demostrarse su negación podrá serlo. Al buscar al mismo tiempo el razonamiento que establezca la verdad de esa proposición o de su negación, ese razonamiento aparecerá finalmente en la enumeración de los textos. Si la proposición es demostrable, aparecerá un razonamiento que la establezca; si no, aparecerá un razonamiento que establezca su negación. El método, rectificado de esa manera, siempre proporcionará un resultado, y el razonamiento podrá reducirse al cálculo, lo cual contradiría el resultado de Church y Turing. Por lo tanto, existen proposiciones que no son demostrables y cuya negación tampoco lo es.

Es posible construir proposiciones como ésas, que expresan la inexistencia de la demostración que establece su verdad. Reconocemos aquí una nueva variante de la paradoja de Epiménides, el cretense que pretendía que fuera falso todo cuanto afirmaba.

El roble y la caña

La existencia de teorías incompletas no debe sorprendernos. Si se suprimen los axiomas de una teoría, los símbolos del lenguaje perderán todo su significado. No se ve, entonces, cómo podría establecerse que Sherlock Holmes es inteligente o que no lo es si nada se sabe sobre Sherlock Holmes ni sobre la inteligencia. De manera similar, si se desea saber quién es el autor de un crimen, pero no se cuenta con indicio alguno ni con la posibilidad de efectuar una investigación para averiguarlo, no se ve cómo podría saberse. Es una banalidad señalar que, si se hacen a un lado los axiomas, algunas proposiciones de las teorías resultan indeterminadas*. Es claro, por supuesto, que el teorema de Gödel no se reduce a esta trivialidad. Lo que él señala es que, cualesquiera que sean los axiomas que se decida plantear, siempre hay una proposición indeterminada (a menos que la teoría sea muy poco expresiva y, por ello, reductible al cálculo). Así pues, ese teorema no se refiere a una teoría en particular, sino a todas las teorías posibles.

De manera que no es necesario esperar a que se erradiquen todas las proposiciones indeterminadas de una teoría por medio del establecimiento de nuevos axiomas. En efecto, en una teoría enriquecida de ese modo sería posible repetir el argumento del teorema de Gödel y encontrar una nueva proposición indeterminada. La incompletitud es una debilidad que resulta comparable a la del roble, pero no a la de la caña. El roble no es menos vulnerable al viento por el hecho de ser más sólido. De manera análoga, una teoría no se completa por el hecho de añadirle axiomas.

En cambio, existen teorías-caña, que son poco expresivas como para ser completas. Esas teorías, como por ejemplo, aquéllas cuyo universo de discurso es finito o la geometría elemental, son siempre reductibles al cálculo.

Sólo sé que no sé nada

En algunas ocasiones se dice que el teorema de Gödel demuestra que existen proposiciones que no son verdaderas ni falsas. Esta formulación desafía al sentido común. Tomemos, por ejemplo, la proposición "existe un x tal que $x + 1 = 0$". Podemos enumerar todos los números y averiguar si en cada uno de ellos se verifica la propiedad $x + 1 = 0$. Ahora bien: o se encuentra un número en el que se verifique la propiedad, y entonces la proposición es verdadera; o no existe dicho número, y la proposición es falsa. No vemos cómo podría concebirse una tercera posibilidad.

El teorema de Gödel no contradice esa observación de sentido común. Cuando se encuentra un número en el que se verifica esa propiedad, se puede construir sin dificultad un razonamiento que establezca la verdad de la proposición. En cambio, cuando no se encuentra ese número es cuando puede haber un problema. En este caso, ¿quién nos asegura que existe un razonamiento para establecer la negación de la proposición en cuestión? A veces, como sucede en el caso de la proposición "existe un x tal que $x + 1 = 0$", los cálculos que permiten rechazar cada uno de los números son lo suficientemente regulares como para poder referirlos a un argumento único. Como ya se dijo, este argumento es un razonamiento que establece la negación de la proposición en cuestión.

En algunos casos, empero, los cálculos que permiten rechazar cada uno de los objetos son demasiado diferentes e irregulares como para resumirlos por medio de un argumento general. Así, la proposición resulta ser falsa como quiera que sea, pues un mago que pudiera verificar una infinidad de casos se percataría de que ninguno conviene; pero nosotros no podemos acceder a la verdad de la proposición debido a que esa verificación infinita no es reductible a un razonamiento finito.

Cuando se establece que una proposición de la forma "existe un x tal que A", donde A es una propiedad accesible al cálculo, es indeterminada en el marco de cierta teoría, de alguna manera se demuestra que esa proposición es falsa, pues un mago que pudiera verificar la infinidad de casos se percataría de que ninguno de ellos conviene.

Asimismo, una proposición indeterminada de la forma "para todo x, A" es verdadera debido a que un mago capaz de examinar todos los casos no encontraría contraejemplo alguno. De hecho, el argumento que establece la indeterminación de una proposición de esa forma en el marco de cierta teoría establece su verdad. Por supuesto, ese argumento indirecto no es un razonamiento válido para esa teoría en sí (pues si lo fuera, entonces la proposición dejaría de ser indeterminada).

Así pues, una proposición puede ser indeterminada en el marco de una teoría, pero puede dejar de serlo en otra, la cual implica una forma más elaborada de razonamiento, lo que le permite razonar sobre los razonamientos. Es posible percatarse de más cosas cuando se sale de una teoría con objeto de considerarla desde el exterior. De la misma manera, es posible mirarse mirar, y así sucesivamente. Como sucede con las muñecas rusas, que encajan una en otra indefinidamente, siempre será posible salir de la teoría en cuyo marco se razona a fin de considerarla desde el exterior y establecer la verdad de nuevas proposiciones. No todas las argumentaciones son susceptibles de poder expresarse en la misma teoría.

La naturaleza de la verdad matemática

Interpretar el teorema de Gödel exige, una vez más, el análisis de la naturaleza de la verdad en el caso de un discurso que verse sobre objetos abstractos.

En 1911, la *Gioconda* fue robada del museo del Louvre, y hubo quienes aventuraron la afirmación de que el ladrón había sido nada menos que Apollinaire. Si el día de hoy intentásemos abrir una nueva investigación sobre el hurto, lo más seguro sería que no encontraríamos los indicios que nos permitieran concluir si Apollinaire fue el ladrón.

El hecho de que no podamos conocer la verdad al respecto no impide que Apollinaire sea ya inocente, ya culpable. Él, por ejemplo, lo sabía con seguridad. En el caso del robo de la *Gioconda*, podemos afirmar que el hecho de que Apollinaire se la haya robado o no constituye un hecho independiente de lo que nosotros sepamos al respecto. El hecho en sí entraña una verdad, pues Apollinaire, la *Gioconda* y el museo del Louvre existen en el mundo material, independientemente de la percepción que tengamos de ellos. Pero

¿podríamos afirmar lo mismo si Apollinaire fuera un personaje de novela? *The Big Sleep*, de Raymond Chandler, acaba sin que el lector sepa quién mató a uno de los personajes. Por lo demás, el propio Chandler refería que no tenía idea del asunto. En este caso resulta más aventurado pretender que la proposición "el general mató al chofer" encierra en sí una verdad independiente de lo que saben los personajes, el lector y el propio Chandler, debido a que los hechos de ficción sólo existen en la medida en que tenemos conocimiento de ellos.

¿Podemos afirmar, entonces, que una proposición que se refiere a objetos abstractos entraña en sí una verdad, independientemente del conocimiento (o de la posibilidad del conocimiento) que tengamos de ella? Dos escuelas de pensamiento discrepan en este punto. Para los platonizantes*, la proposición "para todo x, $0 + x = x$" es verdadera, sépase o no demostrarla. Para los platonizantes más ortodoxos, la verdad de esa proposición se desprende del hecho de que los objetos abstractos poseen una realidad aun cuando ésta no es material (para ellos, existir no significa necesariamente *existir en el mundo*). Para quienes siguen una corriente más moderada, esa proposición es verdadera debido a que un mago que fuese capaz de enumerar todos los números se percataría de que en cada uno de ellos se verifica esa propiedad, y concluiría que la proposición es verdadera en el infinito. Así, el teorema de Gödel no haría sino demostrar nuestra incapacidad parcial para descubrir esa verdad por medio de razonamientos finitos. Bertrand Russell (1872-1970), casi en tono de provocación, llegará a calificar a esa incapacidad de "simplemente médica".

Los platonizantes oponen entre sí dos nociones, *verdad* y *demostrabilidad*, que no son idénticas, y para ellos el teorema de Gödel prueba que existen cosas verdaderas que no son demostrables. Los antiplatonizantes*, por el contrario, rechazan la noción de *verdad intrínseca.* Ellos no ven en qué otro lugar que no sea el mundo material podrían existir los objetos abstractos, y la noción de *verificación infinita* requiere suponer la existencia de un mago con poderes sobrenaturales, hipótesis, esta última, especialmente inaceptable en el dominio científico. No queda, pues, otra solución que definir el concepto de *verdad* como sinónimo de *demostrabilidad.* En un discurso que verse sobre objetos abstractos, la verdad, según los platonizantes, es creada, mas no revelada, por el razonamiento. Una vez que se abandona la idea platonizante de verdad, se comprende mejor que una proposición puede no ser verdadera ni falsa.

LA SEGURIDAD DEL RAZONAMIENTO

El razonamiento y el cálculo se oponen, entonces, en dos puntos. En contraste con el cálculo, el razonamiento no se apoya en un método sistemático y no siempre proporciona una respuesta. Todavía nos queda por examinar el último de los tres criterios de confiabilidad que mencionamos anteriormente: la coherencia*, es decir, la propiedad que consiste en no ofrecer dos respuestas contradictorias.

El hecho de que el razonamiento no se apoye en un método sistemático y de que no proporcione siempre una respuesta pone de manifiesto algunos de los límites del método deductivo, si bien ello no constituye su ruina. Por el contrario, al afirmar que la ciencia no tiene respuesta para todas las preguntas, el teorema de Gödel incluso le ha permitido a algunos expiar sus pecados de cientificismo* (de cualquier manera, el reconocer que no se sabe todo es un privilegio que le está reservado a quienes saben mucho). En cambio, si el razonamiento permite demostrar una cosa y su contrario, entonces estamos ante una quiebra verosímil. En efecto, ¿qué opinaríamos del razonamiento si éste permitiera demostrar a la vez que 1 es diferente de 2 y que 1 es igual a 2? Además, si el razonamiento permite demostrar una cosa y su contrario, la contradicción* no podrá menos que extenderse al lenguaje, pues entonces todas las proposiciones podrían demostrarse por medio del absurdo. Así, Russell afirmaba que si 1 fuese igual a 2, entonces él era el papa (debido a que el papa y Russell son dos). Las teorías incoherentes son definiciones incorrectas del universo de discurso que les es propio, pues en un universo determinado resulta imposible que una proposición sea verdadera y falsa a la vez.

Así pues, al parecer la coherencia es la más importante de las tres cuestiones relativas a la confiabilidad del razonamiento. Pero también parece ser la más absurda, pues, en general, las demostraciones son más bien convincentes. Una vez que se ha demostrado que 1 es diferente de 2, es necesario hacer alarde de escepticismo para pensar que lo contrario, es decir, que 1 es igual a 2, puede demostrarse también. Históricamente, los lógicos, por lo que parece, no se han interesado seriamente en la cuestión de la coherencia del razonamiento sino hasta que ella se les ha impuesto por fuerza, cuando se enfrentan a una contradicción. Con objeto de explicar esta interrogante que gravita sobre la coherencia del razonamiento, es necesario empezar por comprender la sacudida que experimentaron los matemáticos y los lógicos cuando, a principios del siglo XX, cayeron en esa contradicción.

La crisis de la teoría de conjuntos*

En el origen del desarrollo de las matemáticas hay objetos que, aun cuando son abstractos, no por ello se relacionan en menor medida con los objetos de la experiencia. Nos referimos a los números enteros y a las figuras geométricas. Más adelante se inventaron objetos más alejados de la experiencia, a saber: los números reales, los grupos, los espacios vectoriales, etc. Cuando se añaden nuevos objetos a ese repertorio, ello jamás obedece al gusto por la novedad, sino al propósito de resolver los problemas que plantean los objetos ya conocidos. Tenemos, por ejemplo, la noción de *grupo*, propuesta por Evariste Galois (1811-1832) para resolver los problemas relativos a las ecuaciones algebraicas. Así, la teoría de los grupos se creó para hacerle frente a los problemas que existían antes de la invención de esa teoría. De manera similar, para resolver los problemas de convergencia de las series trigonométricas, Georg Cantor (1845-1918) dio a conocer en 1872 unos nuevos objetos matemáticos: los conjuntos*.

El concepto de *conjunto* es, al parecer, bastante anodino. A partir del momento en que se distingue la noción de *detective* es posible imaginar que metemos a todos los detectives en un saco, al cual podremos considerar entonces como el conjunto de los detectives. Lo que resulta novedoso es que Cantor no se interesó exclusivamente en las propiedades de los elementos de los conjuntos, sino también en las propiedades de los conjuntos en sí. No se trata sólo de decir que Sherlock Holmes forma parte del conjunto de los detectives, sino, por ejemplo, que el conjunto de los detectives consta de menos elementos que el de los ladrones.

Con esa noción de *conjunto* el infinito se introdujo por segunda vez en el razonamiento. Ese infinito no se refiere únicamente a la multitud de los objetos, sino a que ciertos objetos, como, por ejemplo, el conjunto de los números enteros, serán en lo sucesivo individualmente infinitos. De esta manera se ha pasado del infinito en potencia al infinito en acto.

Para referirse a esos conjuntos, Cantor y Frege propusieron teorías muy similares. Ambas teorías incluyen un axioma poco feliz: cada vez que se dispone de una propiedad, como, por ejemplo, ser detective, se puede considerar el conjunto correspondiente: el conjunto de los detectives. Lo que se olvida en ese principio es precisar que los objetos que son susceptibles de verificar la propiedad en cuestión deben ser objetos que existan *antes* que el conjunto así construido. Por esta razón, si en la teoría de Cantor y Frege se comprueba que el conjunto constituido verifica, en tanto que objeto, la propiedad constituyente, entonces ese conjunto es uno de sus propios elementos. Claro está que el conjunto de los detectives no es en sí un detective, pero con la propiedad *ser un conjunto infinito* se puede formar el conjunto de los conjuntos infinitos. Y puesto que este objeto es en sí mismo un conjunto infinito, resulta que es uno de sus propios elementos. Cesare Burali-Forti* (1861-1931), en 1897, y Russell*, en 1902, probaron que esa teoría era incoherente. En efecto, según los principios de Cantor y Frege, se puede construir el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos. A continuación, puede demostrarse a la vez que ese conjunto es uno de sus propios elementos y que no lo es. Aún aquí podemos reconocer una variante de la paradoja de Epiménides.

La contradicción en la teoría de los conjuntos de Cantor y Frege no fue una catástrofe irremediable. Ernst Zermelo (1871-1953), en 1908, y luego Alfred North Whitehead (1861-1947) y Bertrand Russell, en 1910, propusieron algunas enmiendas a ese principio demasiado liberal. En la teoría de Zermelo es posible construir conjuntos con ciertas propiedades, pero no con todas. Así puede formarse el conjunto de los números pares, pero no el conjunto de los conjuntos infinitos ni el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos. La teoría de Whitehead y Russell utiliza un principio diferente, el cual consiste en clasificar todos los objetos en función de su naturaleza: los objetos básicos, los conjuntos de los objetos básicos, los conjuntos de los conjuntos de los objetos básicos, etc. De esa manera, un conjunto sólo contiene aquellos objetos que no lo rebasan en el orden de esa jerarquía, y la cuestión de saber si esos conjuntos se pertenecen a sí mismos carece de sentido.

Una vez que esas teorías estuvieron en condiciones de funcionar, la crisis quedó atrás y el progreso de las matemáticas pudo seguir adelante. Pero quedaban en pie las verdaderas preguntas: ¿cómo había sido posible concebir una teoría incoherente?, ¿qué era necesario hacer para evitar que ello se repitiese? Y, sobre todo, ¿eran coherentes las teorías reformadas de Zermelo, Whitehead y Russell, o un nuevo Russell descubriría en ellas una nueva contradicción? La actitud que entonces prevalecía era la de rechazar cualquier nueva teoría que, para comenzar, no demostrara ser coherente. Hilbert llevó a su extremo ese método al dudar de la coherencia de una teoría tan simple como lo es la de los números enteros.

La eliminación del infinito

El descubrimiento de la contradicción en la teoría de conjuntos de Cantor y Frege suscitó un nuevo problema en torno a la noción de *verdad* considerada como sinónimo de *demostrabilidad*. Como ya lo vimos, en esa teoría se puede demostrar plenamente que 1 es igual a 2, que todos los detectives son ladrones, que Bertrand Russel es el papa, y mil cosas más, no menos disparatadas. ¿Acaso esas afirmaciones son verdaderas so pretexto de que son demostrables? Claro está que podemos plantear los axiomas que queramos y que nada nos impide considerar una teoría en la que 1 sea igual a 2. Pero la verdad matemática no se fundamenta únicamente en los axiomas y los razonamientos: ella se fundamenta, ante todo, en el cálculo. La proposición "1 es igual a 2" no puede ser verdadera por razonamiento debido a que ya es falsa por cálculo. Al ser el razonamiento una prolongación del cálculo, es necesario que cálculo y razonamiento coincidan en lo que se refiere a las proposiciones que les son accesibles a ambos. Hemos visto que las proposiciones que resultaban ser verdaderas por medio del cálculo también eran demostrables. Es preciso que también aquí examinemos el principio simétrico, a saber: que las proposiciones que resultan ser falsas por medio del cálculo no son demostrables.

En algunas ocasiones, el problema anterior se le plantea de manera muy concreta a los estudiantes. Un día, un maestro le pidió a sus alumnos que efectuaran el siguiente cálculo: $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$. Mientras los demás alumnos se afanaban en los cálculos, uno de ellos ofreció sin demora la respuesta: 5 050. Ese alumno, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), se había percatado de que al agrupar el 1 con el 100, el 2 con el 99, el 3 con el 98, ..., el 50 con el 51, obtenía siempre 101. Por lo tanto, bastaría con sumar 50 veces 101, lo que daría por resultado 5 050. En este caso, fue un razonamiento el que permitió establecer un resultado que lo mismo hubiera podido establecerse por medio del cálculo. Para el pequeño Gauss era muy importante que la proposición "$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5\,050$", que él estableció por medio del razonamiento, también pudiera establecerse por medio del cálculo, pues de no ser así su resultado habría diferido del de su maestro y, por ende, habría sido falso. Era necesario, pues, que la teoría que Gauss utilizó para razonar no permitiera demostrar proposiciones falsas en el sentido del cálculo.

Para que una teoría no permita demostrar la verdad de ninguna proposición falsa en el sentido del cálculo basta con que sea coherente. En efecto, si una teoría permite establecer la verdad de una proposición falsa en el sentido del cálculo, como "$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \neq 5\,050$", en tanto que ella permite igualmente establecer la proposición "$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5\,050$", que es verdadera, entonces esa teoría es incoherente.

La búsqueda de coherencia es, así, una auténtica búsqueda de la verdad de las proposiciones demostradas. En efecto, si la teoría en cuyo marco se razona es coherente y permite simular el cálculo, entonces todas las proposiciones accesibles al cálculo y demostradas son verdaderas para el cálculo. Por lo que se refiere a las proposiciones que no son accesibles al cálculo, sólo se les juzgará a partir de sus consecuencias. En última instancia, poco importa que una proposición general sea verdadera o falsa en el sentido del razonamiento: sólo cuentan sus consecuencias accesibles al cálculo. Por ejemplo, la proposición "para todo x, $x + 1 = x$" es falsa porque su consecuencia, $0+1 = 0$, que es accesible al cálculo, es asimismo falsa. De manera similar, la proposición "todos los palíndromos contienen la letra a" es falsa, pues su consecuencia, "la palabra *oso* contiene la letra a", que es accesible al cálculo, es también falsa.

¿Se puede establecer la coherencia del razonamiento por medio del razonamiento?

El descubrimiento de una teoría incoherente hace gravitar una sospecha sobre la confiabilidad del razonamiento. Cabe entonces preguntarse si es razonable pretender probar que el razonamiento es confiable por medio de un razonamiento. Nadie, en efecto, puede ser garante de su propia persona. Por ejemplo, la teoría de conjuntos de Cantor y Frege, que es incoherente, demuestra su propia coherencia por cuanto demuestra todas las proposiciones. A una teoría que demuestra su propia coherencia no debe dársele más crédito que el que se le da a un desconocido que presta juramento de su sinceridad. O bien se confía en el desconocido, y su juramento resulta entonces superfluo; o bien no se confía en él, y su juramento, por lo tanto, carece de valor. Si se duda de su sinceridad, es necesario informarse acerca de él con alguien más. Asimismo, si lo que se desea es convencerse de la coherencia de una teoría A, es necesario demostrar esta coherencia por medio de otra teoría B de cuya coherencia se está convencido. Una demostración semejante prueba la coherencia de la teoría A, pues si esta teoría fuera incoherente sería posible demostrarla por medio de la teoría B. De modo que la teoría B demostraría que A es a la vez coherente e incoherente, y la teoría B sería en sí incoherente.

Una demostración de coherencia siempre es relativa*. Se prueba que una teoría es coherente siempre que la teoría en cuyo marco se formula la demostración de coherencia es coherente. El proyecto de probar la coherencia absoluta del razonamiento no tiene sentido, pues no existe un razonamiento que sea extrínseco al razonamiento.

Sin embargo, en el contexto de las matemáticas de principios del siglo XX, la cuestión no era demostrar la coherencia absoluta del razonamiento. El problema consistía en darle acogida en el razonamiento a nuevos objetos (los conjuntos) que implicaban el infinito en acto y, por ende, en demostrar la coherencia de las nuevas formas de razonamiento asociadas a esos objetos, que son las teorías de Zermelo y de Whitehead y Russell. A fin de probar la coherencia de esas nuevas formas de razonamiento, nada impedía ubicarse en una teoría elemental cuya coherencia parecía ofrecer mayor seguridad.

Hemos visto (véase la página 42) que uno de los ejes del programa formulado por Hilbert a principios de los años veinte consistía en reducir el razonamiento al cálculo. Dicho en términos más generales, el programa apuntaba a probar la coherencia del razonamiento matemático general por medio de métodos elementales. De alguna manera, de lo que se trataba era de construir, desde el interior, un nuevo piso en la morada de las matemáticas. Con este objetivo en particular, Hilbert quiso probar, valiéndose de métodos elementales, que el razonamiento se reducía al cálculo, pues ese era un medio viable para probar la coherencia del razonamiento matemático general. El resultado al que llegaron Church y Turing puso de manifiesto que esa reducción no era posible y que, por ende, la idea de demostrar la coherencia del razonamiento matemático general valiéndose de ese método no podía verse coronada por el éxito.

Demostraciones directas e indirectas

Otra idea para demostrar la coherencia de una teoría fue la que propuso Gerhard Gentzen (1909-1945). Esa idea se apoya en la oposición existente entre dos tipos de demostraciones: las demostraciones directas* y las demostraciones indirectas. Una demostración es indirecta cuando consiste en resolver un problema en términos generales para luego aplicar la solución a un caso particular. Por ejemplo, la demostración de la proposición "$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5\,050$", que consiste en efectuar las sumas correspondientes, es directa, en tanto que la del pequeño Gauss es indirecta, por cuanto formular por completo su argumento implica demostrar que para todo número n, $1 + 2 + 3 + \ldots + 2 \times n$ es igual a $n \times (2 \times n+1)$, y aplicar posteriormente este resultado al caso en el que n vale 50.

Gentzen probó que la demostración directa de una proposición accesible al cálculo es una simulación de éste. Por lo tanto, no existe demostración directa de las proposiciones que son accesibles al cálculo y que son falsas: 1 = 2, o 1 + 2 + 3 + ... + 100 ≠ 5 050. A continuación, Gentzen probó que toda demostración indirecta puede transformarse en una demostración directa, y proporcionó un método de cálculo para obtener esa demostración directa a partir de la demostración indirecta. Ese método consiste en eliminar progresivamente los rodeos en el razonamiento, es decir, en remplazar una demostración general utilizada en un caso particular por una demostración del caso particular.

Por ejemplo, si después de haber encontrado su demostración indirecta el pequeño Gauss aún abriga dudas sobre su conclusión, le bastará con aplicar el método de Gentzen para obtener la demostración directa (es decir, el cálculo solicitado por el maestro). Hélo aquí, pues, tranquilo: la proposición que él ha demostrado es verdadera en el sentido del cálculo.

El problema es que para demostrar que el método de Gentzen proporciona invariablemente un resultado (es decir, que no conduce a cálculos infinitos), siempre será necesario ubicarse en una teoría más general que aquélla cuya coherencia se somete a prueba. Las demostraciones de coherencia de Gentzen no responden al programa de Hilbert, pues para probar la coherencia de la teoría de conjuntos sería preciso ubicarse en una teoría más general y, por lo tanto, menos segura que aquella que supuestamente ha de garantizarse.

El segundo teorema de incompletitud de Gödel

Kurt Gödel probó con su segundo teorema de incompletitud que ese fracaso no se debía a un defecto en el método de Gentzen, sino que era algo inevitable. El citado teorema prueba, en efecto, que ninguna teoría coherente puede demostrar la coherencia de una teoría más general. Así pues, no puede resultar exitoso el programa de Hilbert, que se propone demostrar la coherencia del razonamiento matemático general utilizando métodos elementales.

El primer teorema de incompletitud de Gödel demuestra que en todas las teorías existen proposiciones indeterminadas. El segundo teorema demuestra, de alguna manera, que en una teoría T, la proposición "la teoría T es coherente", es invariablemente una de las proposiciones indeterminadas. En consecuencia, ninguna teoría coherente puede demostrar su propia coherencia ni, *a fortiori*, la coherencia de una teoría más general. De modo que no se puede demostrar la coherencia de las teorías de Zermelo, o de Whitehead y Russell, ni reduciendo de manera elemental el razonamiento al cálculo, ni demostrando, también de manera elemental, que las demostraciones indirectas pueden transformarse en demostraciones directas, ni por algún otro método elemental, cualquiera que sea. Los nuevos pisos de una casa jamás podrán construirse desde el interior. Así pues, resulta verosímil que las teorías de Zermelo, o las de Whitehead y Russell, sean coherentes. Como quiera que sea, hasta ahora nadie ha encontrado contradicciones en ellas. Pero si estas teorías son coherentes, no es posible demostrarlo a menos que se recurra a una teoría más general, y una demostración semejante no sería de mucho interés, pues utilizaría principios menos seguros que aquellos que se supone debe garantizar.

El cálculo y el razonamiento

A fin de cuentas, resulta que el cálculo y el razonamiento se oponen prácticamente en todos los criterios de confiabilidad. El cálculo se apoya en un método sistemático, siempre proporciona una respuesta y nunca ofrece dos respuestas contradictorias.

Por el contrario, como lo demuestra el teorema de Church y Turing, la búsqueda de un razonamiento no se concreta a la aplicación de un método sistemático, sino sólo a la aplicación de un método parcial que ha de proseguir su búsqueda hasta el infinito en caso de que la proposición no sea demostrable. Como lo demuestra el primer teorema de incompletitud de Gödel, el razonamiento no siempre proporciona una respuesta. Por último, la oposición es más sutil en el tercer punto: el segundo teorema de incompletitud de Gödel no demuestra (felizmente) que el razonamiento sea incoherente, sino que, de ser coherente, esta coherencia no puede establecerse sin recurrir a principios más generales y, por ello mismo, menos seguros que aquéllos cuya coherencia se supone han de establecer.

Todos esos resultados negativos pueden ser decepcionantes y, de hecho, su descubrimiento provocó una gran desilusión a principios del siglo XX, una época en que la moda en el ámbito científico no se distinguía precisamente por seguir los estilos del escepticismo y de la modestia. Quienes veían llegar el fin de la historia del razonamiento, es decir, la era en que todos los problemas hallarían solución, se resistieron a admitir, después del hallazgo de Church y Turing, que no se trataba sino de una quimera y que siempre quedarían progresos por hacer. Quienes pensaban que no existen problemas insolubles se resistieron a admitir, después de que se diera a conocer el primer teorema de Gödel, que en todas las teorías existen cuestiones no zanjadas por los axiomas. Por último, quienes veían en el rigor formal del razonamiento una garantía de su seguridad se negaron a reconocer, después del segundo teorema de Gödel, que aun cuando cada una de las proposiciones de un razonamiento se deriva de las que la anteceden por medio de reglas muy precisas, nada garantiza que esas reglas constituyan una teoría coherente y, por lo tanto, que las proposiciones así demostradas sean verdaderas.

Así, preciso era admitirlo: el razonamiento era una herramienta muy eficaz, pero también tenía sus límites.

El sentido común es la cosa mejor repartida en el mundo

RENÉ DESCARTES

A PRIMERA VISTA, la lógica ocupa un lugar muy particular en el seno de nuestros conocimientos. En tanto que la aritmética estudia los números y la geometría se ocupa de las figuras en un plano y en el espacio, etc., la lógica estudia el razonamiento, es decir, el método de la aritmética, de la geometría, etc. El objetivo de los lógicos no se cifra tanto en resolver los problemas, sino, ante todo, en explicar la forma en que los demás resuelven esos problemas. Así, la lógica se presenta como un discurso de segundo nivel, como un metadiscurso o un discurso sobre el discurso.

¿Qué interés puede tener el comprender de esa manera el razonamiento? El estudio del razonamiento, ¿constituye un fin en sí que responde sólo a la curiosidad intelectual, o es algo que resulta útil, por no decir indispensable, para razonar? Señalemos, en primer lugar, que esta cuestión no supone juicio alguno de valor. El hecho de que la lógica sea un fin en sí, nada le resta a su interés. Por el contrario, si hemos de creer en lo que algunos dicen, es únicamente en la curiosidad gratuita donde reside "el honor del espíritu humano". De suyo es interesante explicar por qué una bicicleta se mantiene en equilibrio, aun cuando ello en nada contribuye realmente a saber andar en bicicleta.

Un argumento tradicional, que se orienta en el sentido de negar que una teoría del razonamiento pueda tener consecuencias para el razonamiento en sí, es que todo el mundo, al parecer, sabe razonar como es debido "por naturaleza". El sentido común es, pues, la cosa mejor repartida en el mundo. Por esta razón, la lógica se ocuparía de la epistemología* y del discurso sobre el discurso; pero toda vez que para razonar basta con el sentido común, ella no ejercería efecto alguno sobre el razonamiento mismo.

Existen, por lo tanto, dos posibilidades: o bien el razonamiento es transparente y natural, y entonces su estudio es una tarea meramente gratuita que no ayuda a razonar y que finalmente podría no realizarse; o bien, razonar es menos natural de lo que parece a primera vista. Para tratar de comprender de qué se trata, recurriremos a algunos ejemplos de problemas que la teoría del razonamiento, según parece, ayuda a resolver. Comenzaremos por aquellos problemas que por su propia naturaleza requieren una solución de segundo nivel. A continuación veremos que ciertos problemas corrientes requieren asimismo una solución de segundo nivel. Por último, recordaremos algunas célebres controversias en torno a la corrección de ciertos razonamientos, y veremos cómo la lógica puede ayudar a veces a realizar progresos en ese debate.

MÁS PREGUNTAS

Las ecuaciones algebraicas

EL PRIMER ejemplo que analizaremos será el de las ecuaciones algebraicas. En 1832, Evariste Galois probó que las ecuaciones superiores a las de quinto grado no podían resolverse por medio de radicales, es decir, que no existía un método general que permitiera idear la solución de esas ecuaciones, debido a que esas soluciones no siempre podrían expresarse en un lenguaje que incluya las operaciones habituales: suma, multiplicación, cociente, raíz, etc. Un problema más sencillo sería entonces encontrar un método que se limitara a indicar si una ecuación tenía o no solución, a reserva de buscar enseguida las aproximaciones numéricas de esas soluciones. Alfred Tarski proporcionó ese método en 1930. El método se apoya en el hecho de que la teoría de los números reales (es decir, enteros o no), que tiene símbolos para el número cero, el número uno, la suma, la multiplicación, la relación de orden y la igualdad, era reductible al cálculo. Existe, en particular, un método de cálculo que indica si una proposición de la forma específica "existen un x, un y... tales que $a = b$" es demostrable, es decir, si la ecuación $a = b$ tiene una solución.

En cambio, en 1900, Hilbert había planteado el problema de encontrar un método similar para las ecuaciones algebraicas en el dominio de los números enteros. En 1970 Yuri Matiyasevich (nacido en 1947) probó que eso era imposible. Con ese objeto, generalizó el resultado de Church y Turing al probar que no existe un método de cálculo que indique si una proposición de la forma "existen un x, un y y un z tales que $a = b$" era demostrable en el marco de la teoría de los números enteros, es decir, si la ecuación $a = b$ tiene una solución.

El éxito de la lógica, que es una teoría de segundo nivel, con los problemas relativos a la existencia de un método para resolver ecuaciones se explica por el hecho de que esos problemas son, de suyo, de segundo nivel. En efecto, no se trata de resolver una ecuación en particular, sino de concebir un método que permita resolver todas las ecuaciones que poseen cierta forma, o bien, de probar que no existe un método semejante. Por lo demás, en las matemáticas siempre ha habido problemas de segundo nivel, pues los matemáticos no se contentan con efectuar cálculos, resolver ecuaciones y demostrar teoremas, sino que conciben métodos para hacerlo de manera automática, o bien prueban que esos métodos no existen.

Las computadoras

Otro ejemplo de segundo nivel a cuyo progreso ha contribuido la lógica es el de la concepción de las computadoras. Ese problema es relativamente antiguo; sin necesidad de retroceder hasta el ábaco, las primeras máquinas mecánicas se deben a Wilhelm Schickard (1592-1635), Blas Pascal (1623-1662), Gottfried Wilhelm Leibniz y Charles Babbage (1792-1871).

Las máquinas de Schickard y de Pascal hacen sumas; la de Leibniz efectúa además multiplicaciones, y la de Babbage permite realizar todavía otros cálculos. Pero ninguna de esas máquinas es universal, es decir, capaz de efectuar cualquier cálculo. No fue sino hasta el siglo XX cuando se concibieron unas máquinas semejantes: las computadoras.*

Los modelos abstractos de cálculo, creados por los lógicos en los años treinta a fin de precisar la cuestión de Hilbert sobre la reductibilidad del razonamiento al cálculo (que finalmente tuvo una respuesta negativa), permitieron aislar las operaciones básicas que debe incluir una máquina de ese tipo para ser universal. Dichos trabajos inspiraron las primeras computadoras, construidas nada más y nada menos que por dos lógicos: John von Neumann (1903-1957) y Alan Turing. Todavía hoy, esos modelos se utilizan para probar que ciertos problemas que se plantean los informáticos no son reductibles al cálculo (por ejemplo, el problema de saber si dos programas hacen lo mismo), e inspiran los principios de los lenguajes de programación, como Lisp, ML o Prolog.

Máquinas para calcular y máquinas para razonar

Uno de esos modelos de cálculo es el razonamiento. Como lo hemos visto, un cálculo siempre puede expresarse por medio de un razonamiento. Sumar 2 y 2 para obtener 4 equivale a demostrar la proposición "2 + 2 = 4". Verificar que el marido de Yocasta es el padre de Edipo equivale a demostrar la proposición "el marido de Yocasta es el padre de Edipo". De la misma manera, calcular el número que precede a 12 para obtener 11 equivale a demostrar la proposición "11 es el número que precede a 12".

En términos más generales, calcular el número que precede a un número *x* equivale a encontrar un número *y* y una demostración de la proposición "*y* es el número que precede a x" o, lo que es más, encontrar una demostración constructiva* de la proposición "existe un y tal que y es el número que precede a x", es decir, una demostración de existencia que procede dando un ejemplo. Por otra parte, la búsqueda de un razonamiento semejante puede efectuarse por medio de una computadora, pues ésta cuenta, como lo hemos visto, con métodos de cálculo parciales que construyen un razonamiento para las proposiciones demostrables. Claro está que la computadora proseguirá indefinidamente su búsqueda en el caso de que la proposición no sea demostrable.

Así, en lugar de considerar a las computadoras como máquinas calculadoras, podemos considerarlas como máquinas que buscan razonamientos. Este principio es el que sirve de base a los lenguajes de programación declarativos, como el lenguaje Prolog. En un lenguaje de esta índole, programar el cálculo del número que precede a otro consiste en dar la definición "y es el número que precede a x si $x = y + 1$". Para calcular el número que precede a 12, se le pide a la computadora que busque una demostración constructiva de la proposición "existe un y tal que y es el número que precede a 12". A partir de esta demostración se obtiene enseguida el resultado 11. De modo que programar en un lenguaje semejante consiste en definir qué es lo que habrá de calcularse por medio de una proposición, y ejecutar el programa consiste en buscar una demostración constructiva de esa proposición, así como en obtener un ejemplo.

Programar con demostraciones

Como es natural, si los problemas son complejos, resulta aventurado permitir que la computadora se las arregle sola para encontrar las demostraciones. Puede entonces optarse por incluir en los programas, además de la definición de lo que se requiere demostrar, indicaciones que permitan orientar la búsqueda de la demostración. Una manera de dar indicaciones sobre la forma de buscar una demostración en un caso particular consiste en proporcionar una demostración del caso general. Por ejemplo, en el caso del cálculo del número precedente se proporciona una demostración de la proposición "para todo *x* no cero, existe un *y* tal que *y* es el número que precede a *x*". Así, cuando el programa se utiliza, por ejemplo, con el número 12, y debe buscarse una demostración de la proposición "existe un *y* tal que *y* es el número que precede a 12", basta con utilizar la demostración del caso general para construir la demostración.

En ese tipo de lenguaje, programar consiste, en primer lugar, en definir por medio de una proposición qué es lo que habrá de calcularse; a continuación, cómo calcularla mediante una demostración de esa proposición. Efectuar un cálculo consiste en adaptar la demostración a un caso particular y en encontrar el ejemplo de la demostración constructiva.

Aplicar dichos lenguajes de programación requiere, ante todo, sistemas de procesamiento de las demostraciones (en el sentido en que se habla de sistemas de procesamiento de textos), es decir, sistemas que busquen las demostraciones, verifiquen la corrección de las demostraciones formuladas por los programadores, encuentren ejemplos en las demostraciones constructivas, etc. Y concebir esos sistemas requiere una teoría del razonamiento.

Por lo tanto, siempre ha habido problemas de segundo nivel en las matemáticas: idear métodos para resolver los problemas, concebir calculadoras y lenguajes de programación, etc. Este procedimiento reflexivo parece ser indisociable del razonamiento. Y la solución de esos problemas requiere una teoría de segundo nivel: una teoría del razonamiento.

MÁS RESPUESTAS

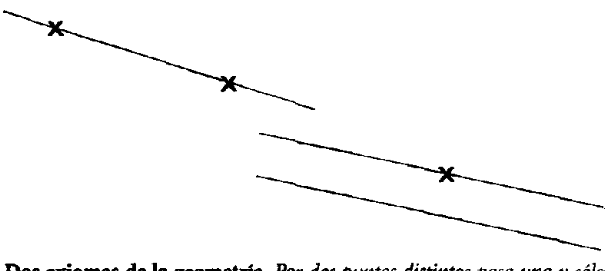
CONSIDEREMOS ahora los problemas corrientes (de primer nivel) que requieren, no obstante, una solución de segundo nivel.

Los axiomas de la geometría

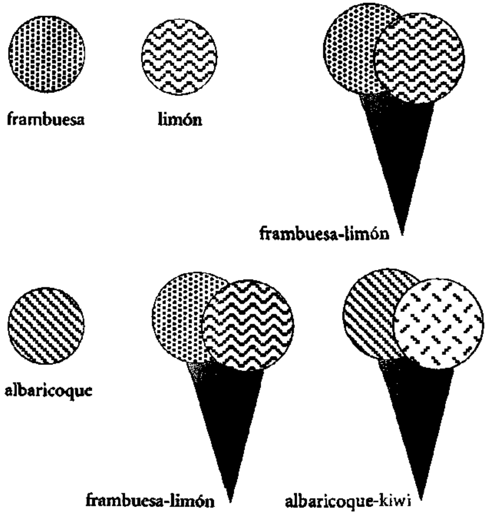
La geometría formulada por Euclides incluye, entre otros, un axioma que expresa que por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta, y otro más, según el cual por un punto exterior a una recta dada pasa una y sólo una recta que no corta a la primera (es decir, tal que esas dos rectas no pasan por el mismo punto).

El último axioma (el axioma de las paralelas*) ha sido objeto de controversia desde hace mucho tiempo. Numerosos geómetras piensan que esa proposición carece de la evidencia requerida para constituir un axioma, y que tiene, más bien, el aspecto de un resultado que aún está por demostrarse. El hecho de que Euclides quizá no la haya demostrado no autoriza que se formule como axioma. Es así como determinados problemas permanecen abiertos durante años, e incluso durante siglos, sin que nadie proponga considerar su enunciado como un axioma. Generaciones de matemáticos han procurado fundamentar la geometría prescindiendo de ese axioma, y han intentado deducirlo de los "verdaderos" axiomas de la geometría, a saber: los otros axiomas de Euclides.

Sin embargo, esos esfuerzos se realizaron en vano, a tal punto que en el siglo XIX se comenzó a preguntarse si, después de todo, el axioma de las paralelas no sería indemostrable en el marco de la teoría de los otros axiomas de Euclides. Si ese axioma es indemostrable, se puede optar por establecerlo o por establecer su contrario sin que por ello se introduzcan incoherencias. Las geometrías no euclidianas* habían nacido. Nicolai Ivanovitch Lobatchevski (1792-1856) y Janos Bolyai (1802-1860) crearon una geometría en la cual por un punto exterior a una recta pasan varias rectas que no cortan a la primera, y Bernhard Riemann (1826-1866) creó una geometría en la cual por un punto exterior a una recta no pasa recta alguna que no corte a la primera (dicho de otra manera, dos rectas se cortan siempre). El proyecto que apuntaba a demostrar el axioma de las paralelas se vio remplazado, entonces, por el proyecto inverso: demostrar la coherencia de



Dos axiomas de la geometría. *Por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta (arriba). Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una recta que no corta a la primera (abajo).*



Queda a nuestro arbitrio decidir si un *punto* es uno de los sabores de frambuesa, limón, albaricoque y kiwi. *Por dos* puntos *distintos* pasa *una y sólo una* recta *(arriba). Por un* punto *exterior a una* recta *dada* pasa *una y sólo una* recta *que no* corta ***a la primera (abajo)***

las geometrías no euclidianas, es decir, la imposibilidad de demostrar el axioma de las paralelas.

Fue a propósito del punto anterior que Poincaré comprendió que los axiomas expresaban el significado de las palabras del lenguaje. Si se establece el axioma según el cual por un punto exterior a una recta pasan varias rectas que no cortan a la primera, es porque las palabras *recta, punto* y *pasar* han dejado de tener su significado habitual. Habría que pensar que esas proposiciones se expresan en una lengua extranjera, en la cual, como diría Jorge Luis Borges, las palabras son, por coincidencia, las mismas que las de nuestra lengua, pero con diferente significado.

Por lo tanto, queda a nuestro arbitrio el decidir que un *punto*, en el sentido que se le da a esta palabra en ese lenguaje, es uno de los siguientes sabores: frambuesa, limón, albaricoque y kiwi; que una *recta* es un helado de dos sabores, y que una *recta pasa* por un *punto* si el sabor en cuestión forma parte de ese helado. Los dos axiomas citados son verdaderos según esta interpretación, puesto que por dos *puntos* distintos *pasa* una y sólo una *recta*.

Por un *punto* exterior a una *recta* dada *pasa* una y sólo una *recta*, tal que las dos *rectas* no *pasan* por un mismo *punto*.

También puede interpretarse el lenguaje de la geometría estableciendo que los *puntos* son los puntos, en sentido corriente, de un disco, y que las *rectas* son los segmentos cuyas extremidades se encuentran sobre el círculo frontera de ese disco. Por último, una *recta pasa* por un *punto* si el segmento pasa por el punto, esta vez en el sentido corriente de esta palabra.

En el marco de esta interpretación son verdaderos los axiomas de Lobatchevski-Bolyai. Y en particular el siguiente: por un *punto* exterior a una *recta pasan* varias *rectas* que no *cortan* a la primera. Por ejemplo, las cuatro *rectas* de la figura de la página 86 *pasan* todas ellas por el *punto* A, y ninguna *corta* la *recta* D.

Si la geometría de Lobatchevski-Bolyai fuera incoherente, en ella podría demostrarse una propisición y su contraria. Al interpretar las palabras de esa manera, podría entonces demostrarse una propisición y su contraria en la geometría corriente de Euclides, que sería, por ende, asimismo incoherente. La coherencia relativa de la geometría de Lobatchevski-Bolyai ha quedado demostrada, pues, por su relación con la geometría de Euclides. La primera es, por lo tanto, coherente, y el axioma de las paralelas no puede deducirse de los otros axiomas de Euclides. Por medio de un método similar es posible probar que la geometría de Riemann (en la cual por un punto exterior a una recta no pasa ninguna recta que corte a la primera) es, también, coherente. Si las citadas geometrías sólo fueron durante mucho tiempo meras curiosidades cuyo único interés consistía en probar la no demostrabilidad del axioma de las paralelas, en el siglo XX manifestaron ser herramientas muy eficaces en física, concretamente en el marco de la teoría de la relatividad generalizada.

Esas interpretaciones de una teoría en el contexto de otra teoría, así como las demostraciones de coherencia relativa que de ello se derivan, constituyen el objeto de la teoría de los modelos*. Esta rama de la lógica, que hoy en día es una de las más dinámicas, fue creada por Tarski y Gödel alrededor de 1930, aunque ya se encontraba en germen con el axioma de las paralelas.

La hipótesis del continuo

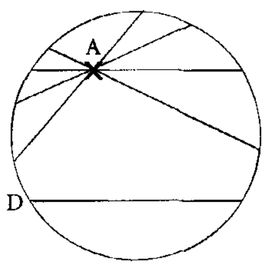
La teoría de los modelos ha resultado igualmente exitosa para resolver problemas difíciles. Así, Cantor probó que ciertos conjuntos infinitos tenían el mismo número de elementos, pero no así otros. Por ejemplo, existen tantos números enteros como números pares, pues es posible hacer corresponder los números enteros con los números pares:

$$\begin{array}{l} 0 \to 0 \\ 1 \to 2 \\ 2 \to 4 \\ 3 \to 6 \quad \text{etc.} \end{array}$$

Pero existen más números reales (es decir, enteros o no) que números enteros, lo que se debe a que no es posible hacer corresponder entre sí esos dos conjuntos.

Los números enteros forman el "infinito más pequeño", es decir, que todo conjunto infinito contiene tantos o más elementos que el conjunto de los números enteros. Cantor, como era natural, planteó la cuestión de saber si había conjuntos infinitos situados entre el conjunto de los números enteros y el conjunto de los números reales, o bien si esos conjuntos eran consecutivos. La cuestión consistía entonces en saber si era posible construir un conjunto que contuviera más elementos que los números enteros, pero menos que los números reales. En 1940, Gödel puso en evidencia que ello era imposible; pero no lo hizo probando que la inexistencia de un conjunto semejante era demostrable en la teoría de los conjuntos, sino evidenciando que su existencia era indemostrable. Más tarde, Paul Cohen (nacido en 1934) probó en 1963 que la inexistencia de un conjunto semejante era también indemostrable. De este modo, la existencia de un conjunto como ése es una proposición indeterminada en el marco de la teoría de los conjuntos.

La idea según la cual el estudio del razonamiento es incapaz de aportar otras formas de razonamiento se apoya implícitamente en la falsa idea de que todo problema puede



Una interpretación de la geometría de Lobatchevski-Bolyai. *Por un* punto *exterior a una* recta pasan *varias* rectas *que no* cortan *a la primera.*

resolverse por medio de un método tradicional. Ahora bien, una de las consecuencias del teorema de Gödel era que es posible percatarse de más cosas en cuanto se sale de la teoría en cuyo marco se razona con objeto de considerarla desde fuera. Por lo tanto, ciertos problemas deben resolverse utilizando una forma más elaborada de razonamiento, la cual consiste en razonar sobre los razonamientos. Ello es en particular necesario cuando la proposición que se pretende demostrar es indeterminada en el marco de la teoría por cuyo medio se espera demostrarla, como es aquí el caso del axioma de las paralelas o el de la hipótesis del continuo. Y razonar sobre los razonamientos requiere una teoría del razonamiento.

La idea de que todo el mundo razona como es debido "por naturaleza" no concuerda con la observación de que existe cierta contradicción entre las diversas tesis filosóficas, políticas o religiosas de las que hemos oído hablar a lo largo de nuestra existencia. En algunos casos estamos dispuestos a reconocer que las tesis que no suscribimos son coherentes, y que lo que sucede es que se apoyan en axiomas o en principios que difieren de los nuestros. Las más de las veces pensamos, simplemente, que esas tesis carecen de fundamento y, por ende, que sus autores no razonan con rectitud.

En el siglo XIII, Lulio intentó crear un lenguaje artificial con objeto de que sus contemporáneos se convirtieran al cristianismo. En efecto, él pensaba que el empleo de un lenguaje semejante lograría probar que la argumentación cristiana era "la válida". Así, Lulio ya defendía implícitamente la tesis según la cual no todo el mundo razona como es debido y, en particular, que era en el lenguaje natural en donde radicaba el origen de las confusiones lógicas. Cinco siglos más tarde, Leibniz pensaba que las controversias políticas y diplomáticas se resolverían por ellas mismas una vez que se lograra expresarlas en una lengua depurada.

Las matemáticas, al parecer, se hallan menos sujetas que la teología o la política a ese género de controversias. Sin embargo, aun cuando se aísle a los conceptos y se eliminen las confusiones debidas a la complejidad del lenguaje natural, la historia de las matemáticas no está desprovista de controversias a propósito de lo que constituye un razonamiento correcto. Ese debate puede referirse a dos puntos: a los axiomas y a las reglas de deducción.

Lo infinitamente pequeño

De esta manera, los axiomas que se refieren a la noción de *número infinitamente pequeño** han sido en particular objeto de controversia. Isaac Newton (1642-1727) y Leibniz se sirvieron ingenuamente, en el cálculo infinitesimal, de los números infinitamente pequeños con objeto de definir, por ejemplo, la noción de *derivada**. Los matemáticos del siglo XIX, Agustín Cauchy (1789-1857), Bernhard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstrass (1815-1897), etc., criticaron esa noción, pues, según pensaban ellos, un número infinitamente pequeño debe ser más pequeño que todos los números, y en particular más pequeño que su mitad, lo que sería incoherente. En consecuencia, rechazaron esa noción y ofrecieron una formulación del cálculo infinitesimal que les permitió liberarse de ella definitivamente.

El estudio del razonamiento permitió resucitar esa noción, que había permanecido abandonada durante más de un siglo. En los años sesenta, Abraham Robinson (1918-1974) ofreció una nueva formulación de la teoría de los números infinitamente pequeños (el análisis no estándar) y probó su coherencia. La observación esencial de Robinson consiste en que a la teoría de los números pueden añadirse un símbolo e y axiomas que expresen que ese número es infinitamente pequeño, es decir, que es menor que 1, 1/2, 1/3, 1/4, etc., sin que por ello se presente contradicción. En efecto, si en esa teoría de los números así enriquecida resulta posible demostrar una cosa y su contrario, esas demostraciones sólo harían intervenir un número finito de nuevos axiomas: $e \leq 1$, $e \leq 1/2$, $e \leq 1/3$, etc. Al interpretar el número e como el más pequeño de los $1/n$ utilizados, se obtendría una contradicción en el marco de la teoría corriente de los números.

La formulación de Robinson se distingue de la formulación clásica, que es contradictoria, en el hecho de que considera implícitamente un axioma único, según el cual para todo número entero n, e sería inferior a $1/n$, en lugar de adoptar un axioma diferente para cada número. Así, las variaciones mínimas en la formulación de esta teoría permiten rebasar la frontera que separa a la coherencia de la contradicción.

El saber qué axiomas pueden utilizarse para razonar con números infinitamente pequeños no resulta, pues, tan evidente como podría pensarse, y ello incluso para los individuos dotados de sentido común. Asimismo, el saber qué axiomas han de utilizarse para razonar sobre los conjuntos, lejos está de ser una evidencia, y las primeras tentativas al respecto han manifestado ser incoherentes. El estudio del razonamiento permite probar la coherencia relativa de ciertas teorías y, por lo tanto, poner de manifiesto qué axiomas pueden utilizarse y cuáles son incoherentes. Y ello incluso si, por lo que se refiere a la teoría de los conjuntos, la lógica ha dado pruebas de su impotencia, sobre todo a partir del segundo teorema de incompletitud de Gödel.

El tercero excluido

Consideremos ahora otra controversia. Se trata, en esta ocasión, de la que afecta a las reglas de deducción y que iniciara Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) a principios del siglo XX.

Ya nos referimos a la controversia en la que se enfrentan las concepciones platonizante y antiplatonizante de la verdad. Según los platonizantes, las proposiciones son verdaderas o falsas independientemente de lo que sepamos de ellas, y las demostraciones nos permiten acceder (parcialmente) a esa verdad. Según los antiplatonizantes, es lo contrario: son las demostraciones las que le otorgan a los enunciados su verdad. Hasta aquí, se trata sólo de una diferencia de interpretación del papel del razonamiento que, al parecer, no afecta a la rectitud de los razonamientos. Una persona puede escribir un razonamiento y otra puede leerlo y aceptarlo aun cuando no le asignen a ese razonamiento el mismo papel (descubrir o crear la verdad de su conclusión). La situación adquiere mayor interés cuando esa diferencia de interpretación conduce a una diferencia en la definición de lo que constituye una demostración correcta.

Retomemos la novela de Raymond Chandler, *The Big Sleep*, que llega a su fin sin que se sepa quién ha asesinado a uno de los personajes. Todo el mundo conviene en afirmar que las dos proposiciones "el general mató al chofer" y "el general no mató al chofer" son indeterminadas. Pero, ¿qué sucede con la proposición "el general mató al chofer o el general no mató al chofer"?

Según los platonizantes, no se sabe si la proposición "el general mató al chofer" es verdadera o falsa, aunque es verdadera o es falsa. Una de las dos proposiciones, "el general mató al chofer" y "el general no mató al chofer", es, pues, verdadera (aun en el caso de que no se sepa cuál), y la proposición "el general mató al chofer o el general no mató al chofer" es, en consecuencia, verdadera.

Para los antiplatonizantes, en cambio, las proposiciones "el general mató al chofer" y "el general no mató al chofer" no son, ni la una ni la otra, verdaderas; tampoco son, por otra parte, falsas, pues son indeterminadas. Como ninguna de esas dos proposiciones es verdadera, la proposición "el general mató al chofer o el general no mató al chofer" tampoco es verdadera, y es, asimismo, indeterminada.

En términos generales, la concepción antiplatonizante de la verdad de Brouwer lo llevó a rechazar una de las reglas del razonamiento clásico, a saber, la del tercero excluido, que permite demostrar la proposición "A o no A" sin que para ello sea necesario demostrar la proposición A ni su negación. Un razonamiento que se ha hilvanado prescindiendo de esa regla recibe el nombre de *intuicionista**. Asimismo, según la concepción platonizante, la proposición "no no A" es idéntica a la proposición A, en tanto que, según el concepto intuicionista, esas dos proposicoines no son por fuerza equivalentes.

De modo que lo que opone entre sí a platonizantes y a intuicionistas no es una simple diferencia de interpretación de la práctica matemática. Esa oposición afecta a dicha práctica, pues implica una diferencia en la definición misma de lo que es una demostración.

Demos otro ejemplo, el cual, a diferencia del anterior, constituye un genuino problema matemático. Se le da el nombre de *racional* a un número que es igual al cociente de dos números enteros: ½, ¼, ¾, etc., y se denota con $\sqrt{2}$ a la raíz cuadrada del número 2, la cual, como se sabe desde la Antigüedad, no es un número racional. Lo que se pretende es demostrar que existe un número no racional que elevado a la potencia $\sqrt{2}$ dé un número racional. Si se sabe demostrar que el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, entonces el problema podrá resolverse con facilidad, pues el número $\sqrt{2}$ sería el conveniente: éste es un número no racional, y al elevarlo a la potencia $\sqrt{2}$ se obtiene $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, que, por hipótesis, es racional. Por otra parte, si se sabe demostrar que el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ no es racional, entonces el problema resulta no menos fácil de resolver, puesto que el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sería de suyo conveniente: éste sería un número no racional por hipótesis, y al elevarlo a la potencia $\sqrt{2}$ se obtendría 2, que es racional.

Según la concepción platonizante, el hecho de que el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sea o no sea racional constituye un hecho en sí, y que no sepamos *a priori* si lo es o no lo es no impide suponer que ese número o es racional o no es racional. Por lo tanto, es posible demostrar la proposición anterior señalando que el número $\sqrt{2}$ responde al problema si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, y que el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ responde asimismo al problema si tal no es el caso.

Esta demostración es correcta, y no dejaría de serlo aun cuando la racionalidad del número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ fuera una cuestión no resuelta por los axiomas.

Por el contrario, según la concepción antiplatonizante, el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional si es posible demostrar que es así, y no es racional si puede demostrarse que no lo es, y no es ni racional ni no racional si la cuestión no la resuelven los axiomas. Así, en tanto no se haya demostrado nada, no puede suponerse que ese número sea o racional, o bien no racional, y entonces esta demostración no es válida.

Demostraciones constructivas

Para obtener una demostración intuicionista de la proposición anterior es preciso demostrar, entonces, que el número

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, o demostrar que no lo es. En este ejemplo se prueba que puede demostrarse que ese número no es racional y que es posible construir una demostración intuicionista. En esta demostración ya no es necesario distinguir entre ambos casos. En efecto, basta con señalar que el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ responde al problema en la medida en que no es racional y en que se obtiene un número racional al elevarlo a la potencia $\sqrt{2}$.

Existe una profunda diferencia entre la demostración anterior y la demostración clásica: la demostración intuicionista prueba que existe un número en el que se verifica la propiedad requerida en cuanto se proporciona un ejemplo de un número semejante, en tanto que la demostración clásica se contenta con probar que existe ese número, sin que sea preciso dar un ejemplo, o, más precisamente, dando dos ejemplos posibles, pero sin optar por uno de ellos. Una demostración de existencia como ésa, que procede *construyendo* un ejemplo, aporta una información adicional y se denomina *constructiva*. Lo que hemos señalado en este caso particular constituye un hecho general: una demostración intuicionista es siempre constructiva. En una demostración directa como la anterior, el ejemplo es explícito. Para encontrar un ejemplo en una demostración indirecta, deberá comenzarse por transformarla en una demostración directa.

¿Tomarán el poder los intuicionistas?

Las reglas de deducción no son verdades reveladas. Así como los axiomas expresan el significado de las palabras que se utilizan en una teoría, esas reglas expresan el significado de las palabras *y*, *o*, *si*, *para todo x*, *existe un x*, etc. Modificar las reglas de deducción o abandonar el principio del tercero excluido tiene por resultado, entonces, cambiar el significado de esas palabras. En particular, desde el punto de vista intuicionista, la proposición "existe un *x* tal que A" expresa el conocimiento de un objeto en el que se verifica la propiedad A, en tanto que desde el punto de vista clásico esa proposición expresa, con mayor debilidad, que en alguna parte debe haber un objeto que verifique esa propiedad, aun cuando no se sepa dónde.

No hay razón por la que deban excluirse uno al otro esos dos significados de las palabras *y, o, si, para todo x, existe un x*, etc. Es posible integrar en el mismo lenguaje las palabras que tienen un significado intuicionista y las que tienen un significado clásico. Sin embargo, para integrar ambos lenguajes no basta con mezclar sus correspondientes reglas de deducción. En efecto, esas reglas definen de manera global el significado de las palabras *y, o, si, para todo x, existe un x*, etc.: todas las reglas contribuyen a la definición de cada una de esas palabras. Entonces, añadir una nueva regla puede modificar el significado de todos los símbolos del lenguaje.

Gödel propuso diversas maneras de integrar en un lenguaje único esos dos tipos de palabras. En 1933 probó que es posible expresar los símbolos intuicionistas en el marco de la lógica clásica enriquecida con una nueva locución: "se conoce una demostración de". El A o B intuicionista se traduce como: "se conoce una demostración de A o se conoce una demostración de B". El principio del tercero excluido no es válido para esa acepción de la palabra *o*, pues la proposición "se conoce una demostración de A o se conoce una demostración de no A" no es demostrable en la lógica clásica. De manera inversa, en 1941 Gödel probó que es posible expresar las locuciones clásicas en el marco de la lógica intuicionista. El A o B clásico se traduce como "no no (A o B)", y el principio del tercero excluido resulta válido para esta acepción de la palabra *o*, pues la proposición "no no (A o no A)" es demostrable en la lógica intuicionista. Asimismo, el "existe un *x*" clásico se traduce como "no no existe un *x*". Por ejemplo, a partir de la anterior demostración clásica se puede construir una demostración intuicionista de la proposición "no no existe un número no racional que al elevarse a la potencia $\sqrt{2}$ dé un número racional".

El debate entre los adversarios y los partidarios del principio del tercero excluido ha sido a menudo polémico. Los intuicionistas consideraban que las demostraciones clásicas eran falsas, en tanto que los partidarios de las matemáticas clásicas acusaban a los intuicionistas de querer destruir a las matemáticas desde el interior de éstas. Por el contrario, *a posteriori* resulta que puede reconocerse en el intuicionismo la promoción, en el seno del discurso, de un nuevo matiz de las palabras *y*, *o*, *si*, *para todo x*, *existe un x*, etcétera.

De esta manera, el saber qué reglas de deducción se pueden utilizar para razonar resulta ser una cuestión difícil, por no decir inquietante. En este punto, el estudio del razonamiento permite realizar progresos en el problema, en primer lugar, al probar que el hecho de aceptar o de rechazar el principio del tercero excluido constituye, ante todo, un problema que atañe al significado de los símbolos lógicos y, en segundo lugar, al proponer lenguajes que integren los símbolos que poseen ambos tipos de significado.

La contribución de una teoría del razonamiento

En consecuencia, es posible clasificar las contribuciones de una teoría del razonamiento para quien razona en el marco de diferentes categorías. Para comenzar, parece que cuando se razona se plantean problemas de segundo nivel, y resolver algunos de esos problemas requiere, como es natural, razonamientos de segundo nivel. A continuación, algunos problemas corrientes de primer nivel requieren una solución de segundo nivel. Por último, la elección de axiomas y de reglas de deducción prueba, en algunas ocasiones, ser muy difícil, y una teoría del razonamiento puede contribuir a justificar algunas de esas elecciones.

La necesidad de utilizar la teoría del razonamiento para resolver determinados problemas se explica, a menudo, por una propiedad del razonamiento. Por ejemplo, debido a que el razonamiento no es reductible al cálculo, se plantean problemas de segundo nivel vinculados a la existencia de los métodos orientados a resolver ciertos tipos de problemas. Algunos problemas corrientes requieren una solución de segundo nivel porque en toda teoría existen proposiciones indeterminadas. Por último, la dificultad que representa elegir axiomas se encuentra vinculada al hecho de que la coherencia de una teoría no es algo que se imponga de suyo.

Así pues, éstas son, en gran parte, las propiedades intrínsecas del razonamiento que hacen que una teoría del razonamiento resulte útil, por no decir indispensable, para resolver determinados problemas, y que el desarrollo de la lógica sea una etapa necesaria y previsible en la historia del pensamiento deductivo.

ANEXOS

GLOSARIO

antiplatonizante: relativo a una corriente de pensamiento denominada *antiplatonismo*, según la cual las demostraciones crean (no descubren) la verdad de su conclusión.
axioma: proposición cuya verdad se admite sin demostración.

Burali-Forti: *véase* teoría de conjuntos.

cálculo (accesible al): una proposición es accesible al cálculo cuando incluye, en su formulación, la indicación del procedimiento a seguir para establecer su verdad.
ciencias experimentales: ciencias que estudian el mundo material. Se oponen a las matemáticas por cuanto el universo de éstas es abstracto.
cientificismo: creencia exagerada en las posibilidades de la ciencia. En lógica, pueden vincularse al cientificismo las afirmaciones según las cuales existe un método sistemático que indica si una proposición es o no es demostrable, aquéllas según las cuales todo problema tiene una solución, o, lo que es más, aquéllas según las cuales el rigor formal garantiza la seguridad del razonamiento. Estas

tres afirmaciones han sido anuladas por los resultados de Church, Turing y Gödel.

coherencia: propiedad de una teoría que consiste en no incluir una paradoja, es decir, en no demostrar a la vez una cosa y su contrario.

coherencia relativa (demostración de): demostración elemental de que una teoría es coherente siempre que otra lo sea.

computadora: máquina de cálculo universal, capaz de efectuar cualquier cálculo. De manera equivalente, una computadora puede definirse como una máquina de razonar.

conclusión: proposición demostrada por un razonamiento (*véase* premisa).

conjuntos: *véase* teoría de conjuntos.

contradicción: propiedad de una teoría que consiste en incluir una paradoja, es decir, en demostrar una cosa y su contrario.

deducción: *véase* regla de deducción.

demostración: sinónimo de razonamiento.

demostración constructiva: demostración de existencia que procede proporcionando un ejemplo.

demostración de una proposición: un razonamiento es una demostración de una proposición si ésta es la última del razonamiento.

demostración directa: demostración que no incluye rodeos, es decir, una etapa que consiste en demostrar una proposición general para aplicarla, acto seguido, a un caso particular. Por oposición, una demostración que implica un rodeo se denomina *indirecta*.

derivada: número que mide el incremento de una función en un punto. Newton y Leibniz definieron la derivada de una función f en un punto x como la relación $f(x +$

$e) - f(x) / e$, en donde e es un número infinitamente pequeño.

Epiménides: filósofo cretense que enunció la proposición paradójica "todos los cretenses son mentirosos". Una forma más moderna de esa paradoja es la proposición "miento".

epistemología: rama de la filosofía que estudia a las ciencias y su método.

geometría: rama de las matemáticas que trata de las figuras en un plano y en el espacio. La geometría, cuya primera teoría presentó deductivamente Euclides, durante mucho tiempo ha sido el paradigma del método deductivo.

geometría no euclidiana: teoría que no incluye el axioma de las paralelas. En la geometría de Lobatchevski-Bolyai, por un punto exterior a una recta pasan varias rectas que no cortan a la primera. En la geometría de Riemann, por ese punto no pasa recta alguna.

Hilbert (proyecto o programa de): proyecto propuesto por Hilbert a principios de los años veinte, el cual apuntaba, por una parte, a encontrar un método de cálculo que indicara si una proposición era o no era demostrable y, por la otra, a demostrar de manera elemental la coherencia del razonamiento que implicaba el infinito en acto.

hipótesis del continuo: hipótesis formulada por Cantor, según la cual no existe un conjunto que contenga más elementos que el conjunto de los números enteros y menos que el conjunto de los números reales (es decir, enteros o no). Esta proposición es indeterminada en la teoría de conjuntos.

incompletitud: propiedad de una teoría que consiste en incluir una proposición indeterminada, es decir, una proposición que no es demostrable y cuya negación tampoco lo es. La completitud es la propiedad de una teoría que consiste en no incluir una proposición indeterminada, es decir, en demostrar siempre una cosa o su contrario.

inducción: método para acceder a la verdad que consiste en admitir un hecho general a partir de observaciones parciales. Este método resulta indispensable en las ciencias experimentales, si bien no impide admitir cosas falsas, lo que en algunas ocasiones requiere reexaminar un resultado obtenido cuando éste ha dejado de corresponder a la experiencia.

infinitamente pequeño: *véase* número infinitamente pequeño.

intuicionismo: originalmente, es la corriente de pensamiento que antepone la intuición al razonamiento. Por extensión, se denomina *intuicionistas* a las corrientes de pensamiento que rechazan la concepción platonizante de la verdad y el principio del tercero excluido.

matemáticas: ciencia que estudia los universos abstractos y, en general, infinitos. De manera equivalente, discurso que se fundamenta exclusivamente en el razonamiento.

método de cálculo: procedimiento sistemático que permite calcular un objeto o establecer la verdad de una proposición. Se le da el nombre de *método parcial* al método de cálculo que proporciona un resultado o que prosigue indefinidamente su cálculo, en oposición a un auténtico método, que es el que siempre proporciona un resultado.

modelos: *véase* teoría de los modelos.

número infinitamente pequeño: concepto utilizado en el cálculo infinitesimal por Isaac Newton y por Gottfried Wilhelm Leibniz. La incoherencia de la teoría "ingenua" de los números infinitamente pequeños condujo a los matemáticos del siglo XIX a abandonar esa noción. En los años sesenta, Abraham Robinson propuso una teoría coherente de esa noción: el análisis no estándar.

observación: en las ciencias experimentales, es el medio de establecer la verdad de una proposición valiéndose de la percepción sensorial.

paradoja: proposición demostrable, lo mismo que su negación, en el marco de determinada teoría.

paralelas (axioma de las): axioma de la geometría de Euclides, según el cual por un punto exterior a una recta dada pasa una y sólo una recta que no corta a la primera.

platonizante: relativo a la corriente de pensamiento según la cual las proposiciones son verdaderas o falsas independientemente de las demostraciones que permiten descubrir su verdad.

premisa: proposición que se adopta como hipótesis en un razonamiento. Las premisas de un razonamiento deben ser axiomas o proposiciones que se han demostrado previamente por medio de otro razonamiento (*véase* conclusión).

problema de la intermisión: problema que consiste en saber si un método de cálculo proporciona un resultado, o bien, si conduce a efectuar cálculos infinitos. Este problema no se puede resolver por medio del cálculo.

proposición general: proposición que incluye una de las siguientes expresiones: "para todo *x*" o "existe un *x*".

razonamiento: encadenamiento de proposiciones en el que cada una de éstas es, o un axioma, o bien ha sido deducida de las proposiciones que la anteceden por medio de una regla de deducción.

recurrencia (axioma de): axioma de la teoría de los números enteros. Si el número 0 verifica cierta propiedad, y si cada vez que un número n verifica esa propiedad el número $n + 1$ también la verifica, entonces todos los números enteros verifican esa propiedad. Por ejemplo, en el caso de la propiedad $x + 0 = x$, de ello resulta: si $0 + 0 = 0$, y si para todo n, $n + 0 = n$, entonces $(n + 1) + 0 = n + 1$ y, por lo tanto, para todo x, $x + 0 = x$.

reductible al cálculo: una teoría es reductible al cálculo siempre que exista un método de cálculo que indique si una proposición es o no es demostrable.

regla de deducción: regla que indica cómo deducir una proposición de un conjunto de otras proposiciones. Por ejemplo: de las proposiciones "si A entonces B" y A puede deducirse B.

Russell: *véase* teoría de conjuntos.

sofisma: razonamiento que sólo en apariencia es lógicamente correcto y que se concibe con la intención de inducir a error.

teoría: en lógica se entiende que se trata de un conjunto de axiomas.

teoría de conjuntos: teoría que trata de los conjuntos, es decir, de colecciones de objetos que tienen en común una propiedad. La primera tentativa de la teoría de conjuntos, debida a Cantor y a Frege, probó ser incoherente, tal como lo demostraron las paradojas de Burali-Forti (1897) y de Russell (1902): en efecto, el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos, a la vez se contiene y no se contiene a sí mismo. Las teorías reformadas fueron propuestas por Zermelo (1908) y, después, por Whitehead y Russell (1910).

teoría de los modelos: rama de la lógica que estudia las interpretaciones de una teoría en el marco de otra teoría, en particular con miras a construir demostraciones de coherencia relativa.

tercero excluido: regla de deducción clásica que permite afirmar la proposición "A o no A", sin que para ello sea necesario demostrar A ni no A. Los intuicionistas rechazan esta regla.

variable: letra que se utiliza para designar un objeto que permanece aún parcialmente indeterminado. Frege y Peirce propusieron utilizar variables, así como las expresiones "para todo *x*" y "existe un *x*", con objeto de construir las proposiciones generales.

verificación exhaustiva: expediente para establecer la verdad de una proposición general, que consiste en verificar cada uno de los casos particulares. Cuando el universo del discurso es infinito, no es posible efectuar la verificación exhaustiva.

BIBLIOGRAFÍA

NOCIONES BÁSICAS

Cori, R. y D. Lascar, *Logique mathématique*, Masson, col. "Axiomes", 1993.

Gochet, P. y P. Gribomont, *Logique*, Hermès, 1990.

LÓGICA Y LENGUAS NATURALES

Nef, F., *La logique du langage naturel*, Hermès, 1989.

AXIOMAS

Hilbert, D., *Les fondements de la géométrie*, 1899, Dunod, 1971.

Poincaré, H., *La science et l'hypothèse*, 1902, Flammarion, col. "Champs", 1968.

LÓGICA Y MUNDO REAL

Dummett, M., *Les origines de la philosophie analytique*, 1987, Gallimard, col. "Essais", 1991.

Nef, F., *Logique, langage et realité*, Éditions universitaires, 1991.

TEOREMA DE GÖDEL

Gödel, K., E. Nagel, J.R.Newman y J.-Y. Girard, *Le théorème de Gödel*, Le Seuil, 1989.

Smullyan, R., *Les théorèmes d'incomplétude de Gödel*, Masson, col. "Axiomes", 1993.

INTUICIONISMO Y NATURALEZA DE LA VERDAD MATEMÁTICA

Dummet, M., *Philosophie de la logique*, 1978, Minuit, col. "Propositions", 1991.

Largeault, J., *L'Intuitionisme*, Presses universitarics de France, col. "Que sais-je?", 1992.

ÍNDICE TEMÁTICO

GILLES DOWEK es investigador del Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique. Sus trabajos se ocupan de los sistemas de procesamiento de las demostraciones. Ha sido galardonado con el European Philips Contest for Young Scientists and Inventors. También ha participado en las actividades de difusión de los conocimientos científicos de la Association Nationale Sciences Techniques Jeunesse.

ÍNDICE

Se terminó de imprimir esta obra
en el mes de septiembre de 2001 en los talleres de

IMPRESORES ALDINA, S. A.
Obrero Mundial, 201 – 03100 México, D. F.

La edición consta de 4000 ejemplares
más sobrantes para reposición